

制动器试验台混合电模拟控制方法分析

摘要

制动器的设计和测试是车辆设计中最重要的一环之一，制动器试验台是制动器综合性能的重要测试设备。制动器电模拟系统的实质就是在满足路试产生的制动加速度的条件下，合理匹配电动机功率和系统机械惯量。

本文就试验台混合电模拟车辆制动性能的测试进行了分析研究，针对如何控制电动机电流，使电动机和飞轮共同模拟制动器负载的问题，建立了制动过程中电动机驱动电流依赖于可观测量的数学模型，给出了三种合理可行的计算机控制方法，并对题目所给的问题进行了求解。

对于问题一、问题二，我们是根据物理学公式来进行求解的。问题一中，求解得车辆在制动时，半径为0.286m的单个前轮的在承受载荷6230N的情况下等效机械惯量为 $51.9989 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。问题二中，我们求解出了飞轮组的3个飞轮的转动惯量分别为： $30 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 、 $60 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 和 $120 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。结合飞轮组的基础惯量 $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，我们给出了3个飞轮与基础惯量可以组合成的总机械惯量值及其组合方式。

对于问题三，建立了电动机驱动电流依赖于可观测量——制动扭矩的数学模型，根据模型计算得到两种不同机械惯量对应的电动机驱动电流分别是 $I = 174.825 \text{ A}$ 和 $I = -262.2375 \text{ A}$ 。然后，我们计算了问题四中给出的控制方法带来的相对能量误差为5.48%，又对制动扭矩和转速的变化曲线进行回归拟合，分析误差的来源，进而对该控制方法给出评价。对于问题五，给出了三种合理可行的计算机控制方法：1) 电动机驱动电流依赖于瞬时扭矩的控制方法 2) 电动机驱动电流依赖于瞬时转速的控制方法 3) 电动机驱动电流依赖于惯量因子的控制方法，并从简洁性、实时性、准确度、逼真度四个方面对控制方法做出了评价。对于问题六，我们针对控制方法3)实时性欠佳的不足，提出了改进的控制算法。

最后，我们总结了以上各控制方法，并提出了基于BP神经网络参数在线整定的PID实时控制方法，作为本模型的扩展方向。

关键词 转动惯量电模拟 惯量补偿 电动机驱动电流 计算机控制方法

目录

制动器试验台混合电模拟控制方法分析.....	1
摘要.....	1
一、问题重述.....	3
二、问题的分析、建模与求解.....	4
问题一的解答.....	4
问题二的解答.....	4
问题三的解答.....	5
符号说明：.....	5
模型假设：.....	5
问题分析与模型建立：.....	5
问题四的解答.....	7
问题五的解答.....	9
方法一.....	9
对方法一的评价.....	10
方法二.....	10
对方法二的评价.....	12
方法三.....	12
方法三的评价.....	14
问题六的解答.....	14
三、灵敏度分析.....	15
从机械惯量的角度分析：.....	15
从取样时间间隔的角度分析.....	17
四、模型扩展.....	17
参考文献.....	18

一. 问题重述

为了检测制动器的综合性能,需要在各种不同情况下进行大量路试。但是,车辆设计阶段无法路试,只能在专门的制动器试验台上对所设计的路试进行模拟试验。模拟试验的原则是试验台上制动器的制动过程与路试车辆上制动器的制动过程尽可能一致。通常试验台仅安装、试验单轮制动器,而不是同时试验全车所有车轮的制动器。制动器试验台一般由安装了飞轮组的主轴、驱动主轴旋转的电动机、底座、施加制动的辅助装置以及测量和控制系统等组成。被试验的制动器安装在主轴的一端,当制动器工作时会使主轴减速。试验台工作时,电动机拖动主轴和飞轮旋转,达到与设定的车速相当的转速后电动机断电同时施加制动,当满足设定的结束条件时就称为完成一次制动。

路试车辆的指定车轮在制动时承受载荷。将这个载荷在车辆平动时具有的能量(忽略车轮自身转动具有的能量)等效地转化为试验台上飞轮和主轴等机构转动时具有的能量,与此能量相应的转动惯量在本题中称为等效的转动惯量。试验台上的主轴等不可拆卸机构的惯量称为基础惯量。飞轮组由若干个飞轮组成,这些飞轮的惯量之和再加上基础惯量称为机械惯量。但对于等效的转动惯量为 $45.7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的情况,就要在制动过程中,让电动机在一定规律的电流控制下参与工作,补偿由于机械惯量不足而缺少的能量,从而满足模拟试验的原则。

一般假设试验台采用的电动机的驱动电流与其产生的扭矩成正比(本题中比例系数取为 $1.5 \text{ A/N} \cdot \text{m}$);且试验台工作时主轴的瞬时转速与瞬时扭矩是可观测的离散量。

评价控制方法优劣的一个重要数量指标是能量误差的大小,通常不考虑观测误差、随机误差和连续问题离散化所产生的误差。

现在要求你们解答以下问题:

1. 设车辆单个前轮的滚动半径为 0.286 m ,制动时承受的载荷为 6230 N ,求等效的转动惯量。
2. 飞轮组由 3 个外直径 1 m 、内直径 0.2 m 的环形钢制飞轮组成,厚度分别为 0.0392 m 、 0.0784 m 、 0.1568 m ,钢材密度为 7810 kg/m^3 ,基础惯量为 $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,问可以组成哪些机械惯量?设电动机能补偿的能量相应的惯量的范围为 $[-30, 30] \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,对于问题 1 中得到的等效的转动惯量,需要用电动机补偿多大的惯量?
3. 建立电动机驱动电流依赖于可观测量的数学模型。

在问题 1 和问题 2 的条件下,假设制动减速度为常数,初始速度为 50 km/h ,制动 5.0 秒后车速为零,计算驱动电流。

4. 对于与所设计的路试等效的转动惯量为 $48 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,机械惯量为 $35 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,主轴初转速为 514 转/分钟 ,末转速为 257 转/分钟 ,时间步长为 10 ms 的情况,用某种控制方法试验得到的数据见附表。请对该方法执行的结果进行评价。
5. 按照第 3 问导出的数学模型,给出根据前一个时间段观测到的瞬时转速与/或瞬时扭矩,设计本时间段电流值的计算机控制方法,并对该方法进行评价。

6. 第5问给出的控制方法是否有不足之处？如果有，请重新设计一个尽量完善的计算机控制方法，并作评价。

二、问题的分析、建模与求解

问题一的解答

由物理学知识可知，转动惯量计算式为：

$$J = r^2 \frac{G}{g}$$

其中， g 为试验台所处位置的重力加速度， G 为制动时承受的载荷， r 为轮的滚动半径。

将 $G = 6230 \text{ N}$ 、 $r = 0.286 \text{ m}$ 、 $g = 9.8 \text{ N/kg}$ 带入上式即得所求等效转动惯量为 $J = 51.9989 \approx 52 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

问题二的解答

表格 1 问题（2）求解过程

项目	单位	编号		
		1	2	3
外直径a	m	1	1	1
内直径b	m	0.2	0.2	0.2
截面积 $S = \frac{\pi(a^2 - b^2)}{4}$	m^2	0.754	0.754	0.754
厚度h	m	0.0392	0.0784	0.1568
体积 $V = S \cdot h$	m^3	0.0296	0.0591	0.1182
密度 ρ	kg/m^3	7810	7810	7810
质量 $m = V \cdot \rho$	kg	230.8332	461.6663	923.3327
转动惯量 $J = \frac{1}{8}m(a^2 + b^2)$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	30	60	120

从上表可知，三个飞轮各自的转动惯量分别是 $30 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 、 $60 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 、 $120 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

三个飞轮共有 $2^3 = 8$ 种组合方式，各组合方式及其对应的机械惯量如下表所示：

表格 2 组合方式及机械惯量(已加上基础惯量)

组合方式	机械惯量	组合方式	机械惯量
无	$10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	1+2	$100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
1	$40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	1+3	$160 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
2	$70 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	2+3	$190 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
3	$130 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	1+2+3	$220 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

由于电动机能补偿的能量相应的惯量的范围为 $[-30, 30] \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，因此，只

有机械惯量为 $40\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 和 $70\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 两种方式是可选的，需要用电动机补偿的惯量分别是： $12\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 和 $-18\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 。

问题三的解答

符号说明：

- t_1 —— 制动开始时间
- t_2 —— 制动结束时间
- E —— 制动前飞轮和主轴等机构所具有的能量
- T_B —— 制动扭矩，为可观测的离散量
- T_D —— 电动机输出扭矩
- ω —— 主轴角速度
- n —— 主轴转速
- J_v —— 换算到主轴上的等效转动惯量
- J_m —— 飞轮的转动惯量
- J_s —— 需要电动机补充的惯量
- k —— 电动机驱动电流与其产生的扭矩之间的比例系数，取为 $1.5\text{A}/\text{N}\cdot\text{m}$
- I —— 电动机驱动电流

模型假设：

- 1、被模拟的车辆只有平动动能，不考虑车辆的竖直运动
- 2、模拟实验中，主轴的角速度与车轮的角速度始终一致
- 3、忽略车轮自身转动所具有的能量
- 4、电动机驱动电流与其产生的扭矩之间成正比例
- 5、主轴的瞬时转速和瞬时扭矩为可观测的离散量
- 6、不考虑观测误差、随机误差和连续问题离散化产生的误差
- 7、制动时，减速度为常数

问题分析与模型建立：

制动器试验台惯量模拟的工作原理[3]是，用飞轮等部件的转动代替汽车在检测路面上的平面运动，并以飞轮的动能来模拟汽车实际制动时具有的动能，这样，汽车制动过程中的直线滑行运动，就转变为飞轮相对于制动器的旋转。在制动过程中，制动器吸收的能量可由下式表示：

$$1) E = \int_{t_1}^{t_2} T_B \omega dt$$

根据模拟的目的，制动器吸收的能量还应该等于汽车在路试时的动能，即：

$$2) E = \frac{1}{2} J_v (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

制动扭矩 T_B 可表示为：

$$3) T_B = J_v \frac{d\omega}{dt}$$

等效转动惯量、飞轮的转动惯量和电机补充的惯量满足：

$$4) J_v = J_m + J_s$$

电动机驱动电流与其产生的扭矩满足：

$$5) I = k \cdot T_D$$

将4)式代入3)式得：

$$6) T_B = J_m \frac{d\omega}{dt} + J_s \frac{d\omega}{dt}$$

将6)式代入1)式得：

$$7) E = \frac{1}{2} J_m (\omega_2^2 - \omega_1^2) + \int_{t_1}^{t_2} J_s \frac{d\omega}{dt} \omega dt$$

从上式可见，制动器吸收的能量有两部分组成，其中 $E_1 = \frac{1}{2} J_m (\omega_2^2 - \omega_1^2)$ 部分由飞轮模拟， $E_2 = \int_{t_1}^{t_2} J_s \frac{d\omega}{dt} \omega dt$ 部分需电机模拟。令电动机输出扭矩为

$$8) T_D = J_s \frac{d\omega}{dt}$$

根据将能量误差最小化的原则，可将制动器试验台的控制方法问题描述为：

$$\begin{aligned} \min \quad & E \cdot \left(1 - \frac{J_m}{J_v}\right) - \int_{t_1}^{t_2} T_D \omega dt \\ \text{s. t.} \quad & E = \frac{1}{2} J_v (\omega_2^2 - \omega_1^2) \\ & I = k \cdot T_D \end{aligned}$$

将8)与3)式相除并整理可得：

$$9) T_D = \left(1 - \frac{J_m}{J_v}\right) T_B$$

因此，只要控制电机使其输出扭矩 $T_D = \left(1 - \frac{J_m}{J_v}\right) T_B$ ，便可实现对制动时制动器负载的模拟，将5)式代入10)式，即得到电机驱动电流依赖于可观测量的数学模型如下：

$$10) I = k \cdot \left(1 - \frac{J_m}{J_v}\right) T_B$$

初始速度50km/h换算成角速度是 $50000 \div 3600 \div 0.286 = 48.5625 \text{rad/s}$ ，由于制动时间为5秒，易得制动时减速度为 $48.5625 \text{rad/s} \div 5 \text{s} = 9.7125 \text{rad/s}^2$ 。因此，

$$T_B = J_v \frac{d\omega}{dt} = 52 \text{kg} \cdot \text{m}^2 \times 9.7125 \text{rad/s}^2 = 505.05 \text{N} \cdot \text{m}$$

当机械惯量为 $40 \text{kg} \cdot \text{m}^2$ 时，驱动电流为

$$I = k \cdot \left(1 - \frac{J_m}{J_v}\right) T_B = 1.5 \times \left(1 - \frac{40}{52}\right) \times 505.05A = 174.825A \approx 175A$$

当机械惯量为 $70\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 时，驱动电流为

$$I = k \cdot \left(1 - \frac{J_m}{J_v}\right) T_B = 1.5 \times \left(1 - \frac{70}{52}\right) \times 505.05A = -262.2375A \approx -262A$$

结果中的负号表示电动机转子的转动方向与预计方向是相反的。

问题四的解答

评价控制方法优劣的一个重要数量指标是能量误差的大小，本题中的能量误差是指所设计的路试时的制动器与相对应的实验台上制动器在制动过程中消耗的能量之差。首先从能量误差的角度进行评价。

路试时制动器消耗的能量为 $E_0 = \frac{1}{2}J_v(\omega_0^2 - \omega_1^2)$ ，其中 $\omega_0 = 53.8260\text{rad/s}$ ，

$\omega_1 = 26.9130\text{rad/s}$ ， $J_v = 48\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ，解得 $E_0 = 5.2150 \times 10^4$ 。

相对应的试验台测试时，数据是采样得到的离散数据，计算制动过程所消耗的能量我们借用了直边形代替曲边形求曲线下面积的思想，由于采样是等间距的，采样间隔又足够小，我们可以计算每一个采样间隔内所消耗的能量，进行累加求总和即得到整个过程中消耗的能量。具体公式说明如下：

$$E_1 = \sum_{i=1}^{n_0} T_i * \omega_i * \Delta t$$

- 式中 n_0 为采样点总数；
- T_i 为采样时刻的扭矩；
- ω_i 为采样时刻的转动角速度；
- Δt 为采样时间间隔。

据此公式对数据进行计算得到 $E_1 = 4.9292 \times 10^4$ 。于是能量的绝对误差 $\varepsilon = E_0 - E_1 = 2858$ ，相对误差 $\delta = \frac{\varepsilon}{E_0} = 0.0548$ 。能量误差也是一个较小的值，这说明问题四中给出的控制方法是比较合理有效的。

其次，从扭矩 T 和转速 n 随时间的变化趋势（如图 1、图 2）看，扭矩 T 在经历了一个较快的增加阶段后逐渐趋于平稳，稳定在 280 附近，这体现了制动装置缓慢加力的过程，实现了所谓的“软制动”，从保护设备的角度来看，这样的做法是正确的，而且是必须的。

仔细观察可以发现，扭矩 T 在经历上升期后发生了振荡，而且振荡有加剧的趋势，从试验计算结果及系统的运动特性分析，其波动较大的原因应该与两个方面有关：其一，在软制动后的制动过程中，由于主轴转速在不断下降与变化，驱动电机转子所需的惯性力也不断波动，使弹簧施给摩擦片的压力有一定波动，从而使制动扭矩也发生较大的波动。其二，与制动弹簧有关，在制动过程中，弹簧一直处于振动状态。

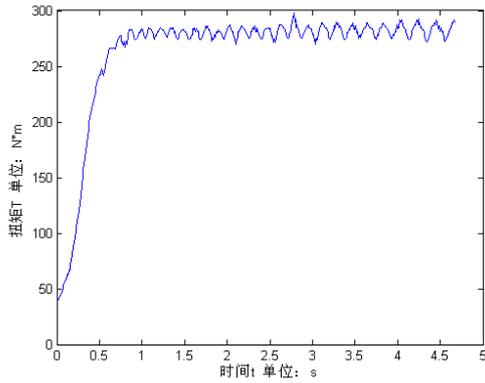


图1 扭矩与时间关系

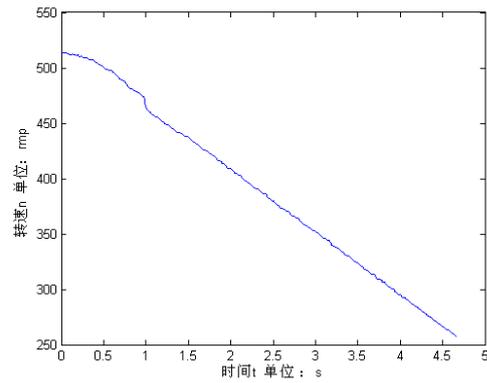


图2 转速与时间关系

与扭矩T的急剧上升阶段相对应，转速n的减少并非是均匀的，但扭矩T趋于稳定时，转速n的减少也趋于均匀。提取当制动器工作平稳时的转速的数据，利用线性回归拟合 $f(x) = p1 \cdot x + p2$ ，拟合得的直线方程为：

$$f(x) = -6.01x + 54.95$$

表格 3

线性回归拟合有关参数

参数	参数估计值	参数的置信区间
p1	-6.01	(-6.03, -5.991)
p2	54.95	(54.9, 55)
$R^2 = 0.9987 \quad F = 3.5898 \times 10^5 \quad p = 0$		

从拟合结果来看，在制动的平稳阶段，主轴的减速度是在 6.01rad/s^2 附近微小波动。

该种控制方法的误差主要就来源于制动初期。因为问题四给出的控制方法的采样测量是等时间间隔的，是根据当前的采样值来决定控制电流，从而控制扭矩的输出。因此，在发出下一次控制电流前，当前这一控制电流是维持不变的。但在这段时期内，扭矩是急剧增加的，这就使得控制电流具有滞后性——控制电流更新速度跟不上扭矩的变化。我们从所给数据中选择前 19 组数据作图（如图 3 示）进行说明。

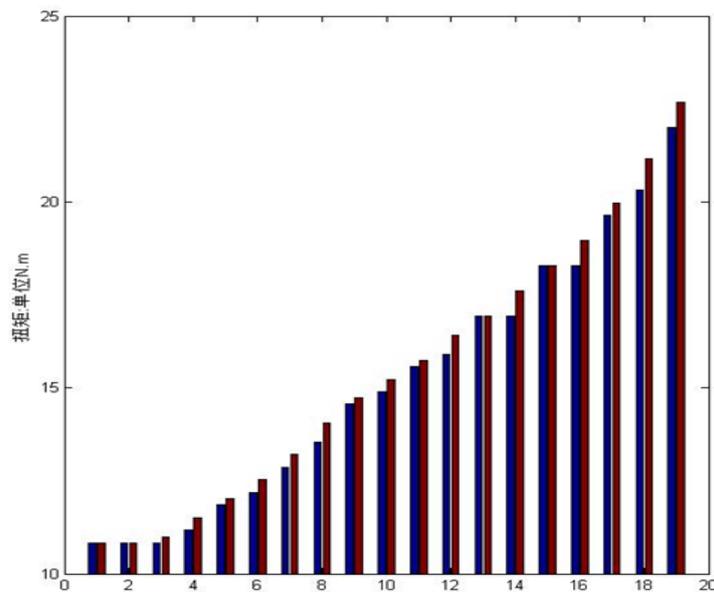


图3 前19组数据

计算前19组数据的误差列为下表：

序数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
误差	0	0	0.1693	0.3385	0.1692	0.3385	0.3385	0.5078	0.1693	0.3383
序数	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
误差	0.1693	0.5078	0	0.6771	0	0.6770	0.3386	0.8464	0.6771	

误差的平均值为：

$$\theta = 0.3296$$

在每个采样间隔时间内，电动机扭矩维持为由控制电流决定的值不变，如图3蓝色所示。红色的为在采样间隔时间内的中间时刻根据该时刻对数据进行插值求得的扭矩值。在变化较为平稳的地方，蓝柱、红柱相差较小，在变化较为剧烈的地方，蓝柱、红柱相差就比较显著了。

问题五的解答

按照问题三导出的数学模型，我们有以下三种计算机控制方法。

方法一

本方法根据前一段时间观测到的瞬时扭矩 T_B ，利用下式来设计本时段的电流值。

$$11) \quad I = k \cdot \left(1 - \frac{J_m}{J_v}\right) T_B$$

具体控制流程如下：

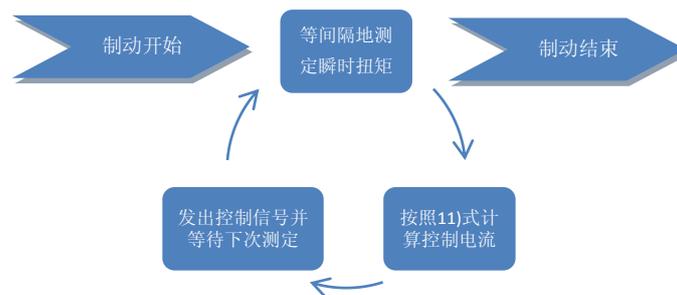


图 4 控制流程图

将按本控制流程得到的扭矩数据绘成图，如图5所示，蓝线是测得的主轴瞬时扭矩，红线是电动机在控制电流作用下产生的扭矩，我们将控制电流作用下产生的扭矩的前20组数据单独画于图6，可以看到，扭矩的大小并非连续变化，而是呈现阶跃式的变化。

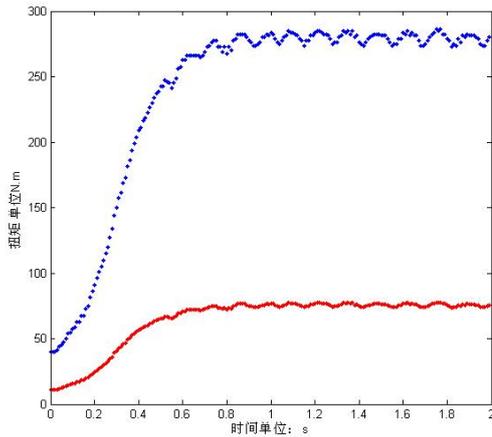


图 5 方法一的模拟结果

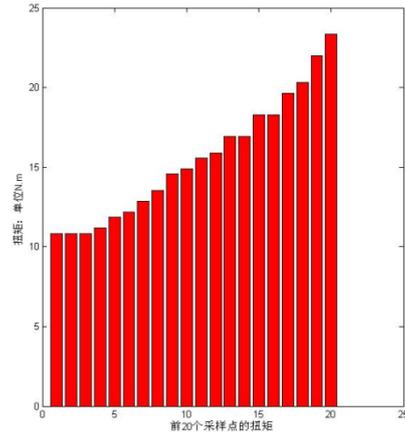


图6 前20个采样点的扭矩

下面是对本方法下的制动过程的分析。

设A点是制动扭矩大于零后某次采样的时刻，B点是对A点的采样处理后输出新的调节量的时刻，则在制动开始到B点这段时间内有如下变化：制动扭矩逐渐变大，控制电流保持不变，主轴转速下降。

在B点发生下列变化：计算机输出值改变，电动机输出的扭矩值跃变为在A点时需电机输出的扭矩

在此后的制动时间内，计算机不断地采样和调节。在每次的采样和调节时间内，控制电流呈阶跃式变化。在每次调节结束时，电机输出的扭矩发生跃变。

对方法一的评价

本方法求解简单，操作简便，在 k 、 J_m 、 J_v 已知的条件下，只需等间隔地测定瞬时扭矩 T_B 即可算得所需控制电流，在发出控制信号后，系统只需等待下次测定即可。

本方法具有较好的实时性，在不考虑硬件运算速度的情况下，缩短取样间隔，电流即可以对扭矩变化做出较快的反应。

本方法也有其缺点。模拟误差主要来自电机模拟加载部分。从图中曲线3可以看出：模拟误差的大小与计算机的采样间隔和需电动机输出的扭矩曲线斜率有关，采样间隔越大，模拟误差越大，当曲线斜率越大，模拟误差越大。由11)可知：曲线斜率与 $k \cdot \left(1 - \frac{J_m}{J_v}\right)$ 有关， k 越大，则斜率越大； $\frac{J_m}{J_v}$ 越小，则斜率越大。

方法二

本方法根据前一段时间观测到的瞬时转速 n ，首先用三次样条插值及追赶法求解角加速度 $\frac{dn}{dt}$ 的当前值，进而计算出本时段的控制电流值，具体说明如下。

主轴转速 n 和时间 t 为由采样仪等间隔采样得到一系列以 t 为横坐标、 n 为纵坐标的数据对 (n, t) ，其采样时间间隔为10ms。考虑到角加速度变化的连续性，我们采样三次样条函数中的三转角方程[1]来求解。

构造三次样条插值函数 $S(t) \in C^2[a, b]$, a 、 b 为测试的起止时间点, 在每个小区间 $[t_j, t_{j+1}]$ 上是三次多项式, 其中 $a \leq t_j = t_0 + j \cdot h \leq b$, ($j = 0, 1, 2 \dots k, h = 50$) 是采样时间节点, 对应各时间点上的函数值 $n_j = f(t_j)$, 且满足 $S(t_j) = n_j$, ($j = 0, 1, \dots k$)。

本例中我们取自然边界条件, 即 $S''(t_0) = S''(t_k) = 0$, 设 $S'(t)$ 在节点 t_j 处的值为 $S'(t_j) = m_j$, ($j = 0, 1, \dots k$), 即角加速度 $\frac{dn}{dt}$ 的离散点值 $n'(t_j)$, ($j = 0, 1, \dots k$), 则三转角方程为:

$$12) \lambda_j m_{j-1} + 2m_j + \mu_j m_{j+1} = g_j, (j = 1, 2 \dots k-1)$$

其中 $\lambda_j = \mu_j = \frac{1}{2}$,

$$13) g_j = 3(\lambda_j f[t_{j-1}, t_j] + \mu_j f[t_j, t_{j+1}]), (j = 1, 2 \dots k-1)$$

由边界条件得两端方程为

$$14) 2m_0 + m_1 = 3f[t_0, t_1] = g_0$$

$$15) m_{n-1} + 2m_n = 3f[t_{n-1}, t_n] = g_k$$

将其合并成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{k-1} & 2 & \mu_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{k-1} \\ m_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{k-1} \\ g_k \end{bmatrix}$$

简记 $\mathbf{Am} = \mathbf{g}$, 用追赶法, 求出 m_j ($j = 0, 1, \dots k$)。求解 $\mathbf{Am} = \mathbf{g}$ 等价于求解三角方程组:

$$\begin{cases} \mathbf{Ly} = \mathbf{g} \\ \mathbf{Um} = \mathbf{y} \end{cases}$$

其中 \mathbf{L} , \mathbf{U} 为矩阵 \mathbf{A} 分解的两个三角阵的乘积, \mathbf{L} 为下三角矩阵, \mathbf{U} 为单位上三角矩阵。

对制动扭矩的微分方程中的 $\frac{dn}{dt}$ 采用三次样条插值及追赶法求得其值后, 代入 16) 式中可计算出控制电流的值。

$$16) I = k \cdot \left(1 - \frac{J_m}{J_v}\right) \cdot J_v \frac{d\omega}{dt}$$

求解角加速度值的算法

- 1、输入初始数据 T_{s1}, T_{s2} 及 h, k ;
- 2、 j 从 0 到 $k-1$, 计算 $f[t_j, t_{j+1}]$;
- 3、 j 从 1 到 $k-1$ 由公式 13) 计算 g_j ;
- 4、由公式 14) 和公式 15) 计算 g_0 和 g_k ;
- 5、把矩阵 \mathbf{A} 记成只含元素 a_j ($j = 2, 3 \dots k+1$), b_j ($j = 1, 2, \dots k+1$), c_j ($j = 1, 2, \dots k+1$)的对角占优的三角线矩阵;
- 6、计算 $\{\beta_j\}$ 的递推公式 $\beta_1 = c_1/b_1, \beta_j = c_j/(b_j - a_j\beta_{j-1})$ ($j=2, 3 \dots k$);
- 7、解 $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{g}$, $y_1 = g_1/b_1, y_j = (g_j - a_j y_{j-1})/(b_j - a_j\beta_{j-1})$ ($j=2, 3, \dots k$);
- 8、解 $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $m_{k+1} = y_{k+1}, m_j = y_j - \beta_j m_{j+1}$ ($j=k, k-1, \dots, 2, 1$).

对方法二的评价

利用Matlab编程, 调用函数的 M 文件进行计算求解, 得出了角减速度和控制电流的离散数据点如图 7、图 8 示。

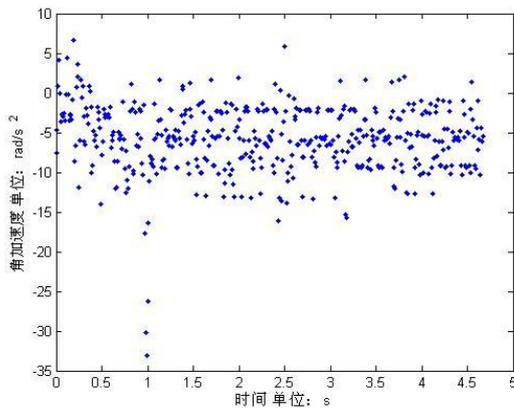


图 7 角加速度与时间的关系

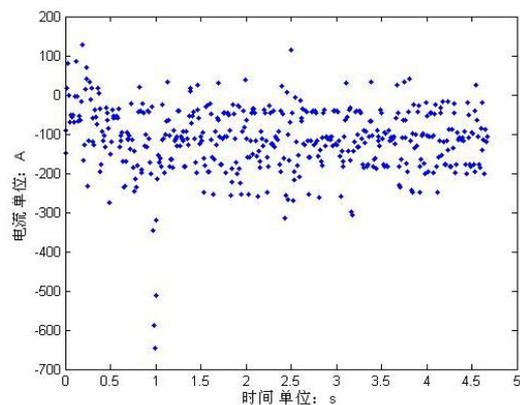


图 8 控制电流与时间的关系

从图中可以看出, 各个时刻的角减速度波动较为剧烈, 这是由于取样间隔 (10ms) 过短、主轴转速不稳定造成的, 这就导致算得的控制电流也有较大的波动, 这个问题可以通过增大取样间隔来解决, 但是增大取样间隔势必会增大能量误差, 降低模拟过程的逼真度。因此, 对本方法来讲, 稳定性和逼真度是一对不可调和的矛盾。从整个制动过程来看, 角减速度的平均值为 -5.765rad/s^2 , 控制电流的平均值为 112.4180A , 这是符合预期的, 本方法在基本方向上是正确的。

方法三

利用控制电流对电动机的扭矩进行控制的过程可以看成是, 有控制地对主轴

施加电能的过程。在施加电能的过程中，要满足能量误差最小化的原则，以保证模拟的准确度和逼真度。基于上述考虑，我们提出了制动器试验台的第三种控制方法。

由

$$7) E = \frac{1}{2}J_m(\omega_2^2 - \omega_1^2) + \int_{t_1}^{t_2} J_s \frac{d\omega}{dt} \omega dt$$

可知，我们只需将总量为

$$E_2 = \int_{t_1}^{t_2} J_s \frac{d\omega}{dt} \omega dt = E - \frac{1}{2}J_m(\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

的电能量按照能量误差最小化的原则逐步施加到主轴上，即可完成控制过程。

制动过程中，飞轮总扭矩 T_B 和转速 ω 都可以测量，我们可以根据式 3) 式和 9) 式求出

$$13) T_D = \left(1 - \frac{J_m}{J_v}\right) J_v \frac{d\omega}{dt}$$

在此，我们引入惯量因子 λ [2]，令 $\lambda = \frac{J_m}{J_v}$ ，则

$$14) T_D = (1 - \lambda) J_v \frac{d\omega}{dt}$$

计算出电流后，通过驱动电流使电动机输出扭矩达到要求；同时，根据当前已经施加的电能量与当前转速下需要加的电能量来算出产生的能量误差，然后依据这个能量误差对式 14) 中的惯量因子 λ 进行调整，达到控制模拟惯量的目的。

设制动的起始时刻为 t_0 ，经过时间间隔 Δt 后变为 t_1 ，即 $t_1 = t_0 + \Delta t$ ，下面就每个时间段，对试验台的控制方法进行分析。

在起始时刻为 t_0 ，惯量因子 $\lambda = \frac{J_m}{J_v}$ ，可以经计算得到，在 t_0 至 t_1 这段时间内，将依据此 λ 设定控制电流。在 t_1 时刻下，需要加的电能量 E_{m1} 为：

$$E_{m1} = \frac{1}{2}(k_0 - 1)J_m(\omega_0^2 - \omega_1^2)$$

式中 λ_0 为 t_0 时刻设定的惯量因子， ω_0 为 t_0 时刻（即制动开始时）的飞轮角速度， ω_1 为 t_1 时刻的飞轮角速度，则当前时刻的能量误差 E_1 为：

$$E_1 = E_{m1} - E_{h1}$$

式中 E_{h1} 为 $t_0 \sim t_1$ 时间段内已经施加的电能，根据能量误差 E_1 ，在到达 t_2 时刻之前进行调节，实现办法就是计算出一个新的适用于下一时间段的惯量因子 λ_1 ，即

$$\lambda_1 = \frac{E_1 + \frac{1}{2}\lambda_0 J_m(\omega_0^2 - \omega_1^2)}{\frac{1}{2}J_m(\omega_0^2 - \omega_1^2)}$$

然后用 λ_1 在 $t_1 \sim t_2 = t_1 + \Delta t$ 时间段内进行惯量模拟控制。 ω_2 为 t_2 时刻的飞轮角速度，在 t_1 时刻通过下式来估算：

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{T_1}{J_m} \cdot \Delta t$$

式中 T_1 为 t_1 时刻的飞轮扭矩，可测量得到。 J_m 为飞轮转动惯量，在 t_2 时刻下需要加的电能量 E_{m2} 为：

$$E_{m2} = \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1)J_m(\omega_1^2 - \omega_2^2)$$

依次类推，可以得到 t_i 时刻的惯量因子 λ_i 的计算公式：

$$\lambda_i = \frac{E_i + \frac{1}{2}\lambda_{i-1}J_m(\omega_i^2 - \omega_{i+1}^2)}{\frac{1}{2}J_m(\omega_i^2 - \omega_{i+1}^2)}$$

t_i 时刻 ω_i 的飞轮角速度的计算公式为：

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \frac{T_i}{J_m} \cdot \Delta t$$

式中 T_i 为 t_i 时刻的飞轮扭矩，可测得。在获得更新后的 λ_i 后，利用下式即可计算出对应的控制电流 I_i 。

$$24) I_i = k \cdot T_D = k \cdot (1 - \lambda) \cdot J_v \frac{d\omega}{dt} = k \cdot (1 - \lambda_i) \cdot J_v \frac{T_i}{J_m}$$

利用 λ_i 在 $t_i \sim t_{i+1}$ 时间段内进行惯量模拟控制。

方法三的评价

方法三直接从能量补偿的角度入手，分时段地将电能量补充到实验系统中，较好地满足了能量误差最小化的原则，保证了模拟试验的准确度和逼真度。但可以看到，上述算法每经过一个 Δt 时间，计算一次惯量因子 λ 的值，然后根据速度变化计算出需要电动机补偿的能量，且每次补偿的能量值是不同的，因而整个能量补偿过程是不连续的。且每经过一个 Δt 都要重新计算一次惯量模拟系数，计算量大，会造成一定程度的延时，实时性不是很好。

问题六的解答

改进算法

针对方法三实时性欠佳的缺点，我们提出了改进的控制方法。

用飞轮的转动惯量模拟汽车制动时的汽车平动惯量，在制动过程中就需要不断地对主飞轮进行能量补偿。设从制动时间开始 Δt 时间，主飞轮角速度从 ω_0 变为 ω_1 ，又因为主飞轮的角速度与汽车路试时的车身平动速度 V 存在以下关系： $V = \omega \times r$ ，其中 r 为主飞轮半径。根据以上关系知，经过 Δt 时间后，需要对飞轮补偿的能量为：

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2}m_{\text{车}}(V_0^2 - V_1^2) - \frac{1}{2}J_m(\omega_0^2 - \omega_1^2)$$

整理得：

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2} \left(m_{\text{车}} - \frac{J_m}{r^2} \right) (V_0 + V_1)(V_0 - V_1)$$

假设 Δt 足够小，速度变化量也足够小，则上式可近似等于：

$$\Delta E_1 = \left(m_{\text{车}} - \frac{J_m}{r^2} \right) V_1 (V_0 - V_1)$$

令 $\Delta V_1 = (V_0 - V_1)$ ，而当 Δt 足够小时有， $\frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = a$ ， a 为飞轮线速度的减速度。

CPU 的指令周期为 $4\mu\text{s}$ ，取 $\Delta t = 4\mu\text{s}$ ，则可认为 Δt 足够小，则有：

$$\Delta E_1 = \left(m_{\text{车}} - \frac{J_m}{r^2} \right) V_1 \Delta t \times a_1$$

所以 t 时刻补偿的能量为，即能量补偿公式为：

$$\Delta E_t = \left(m_{\text{车}} - \frac{J_m}{r^2} \right) V_t \Delta t \times a_t$$

在 Δt 很小的条件下，可近似认为角速度 ω 不变，因而：

$$\int_{t_0}^{t_1} T_D \omega dt = T_D \omega \Delta t = \frac{I_0}{k} \omega_0 \Delta t$$

由

$$\frac{I_0}{k} \omega_0 \Delta t = \Delta E_t = \left(m_{\text{车}} - \frac{J_m}{r^2} \right) V_t \Delta t \times a_t$$

最终可得到：

$$I_0 = k \left(m_{\text{车}} - \frac{J_m}{r^2} \right) \frac{V_t a_t}{\omega_0}$$

类似的，我们可以得到任意一小段时间内控制电流的计算式为：

$$I_i = k \left(m_{\text{车}} - \frac{J_m}{r^2} \right) \frac{V_t a_t}{\omega_i}$$

从公式中可以看出，补偿的能量是随速度和减速度实时变化的，因此系统实时性也很好。由于 Δt 很小，则可认为整个能量补偿过程是连续的。

三、灵敏度分析

车辆的制动性能是车辆性能中很重要的一个因素，车辆制动器的设计和测试是车辆设计中最重要的一环，直接影响着人身和车辆的安全，因此，对车辆制动性能测试的模型与控制方法的灵敏度分析是重要的，且是必须的。

从机械惯量的角度分析：

我们知道，在制动器试验台上对所设计的路试进行模拟实验时，机械惯量并不能精确地等于等效转动惯量，这时的解决方法是，让电动机在一定规律的电流控制下参与工作，不足那部分惯量由电动机补偿。

从问题二的回答中，我们知道，本问题有两种惯量补偿方案：分别对应于机械惯量 $J_m = 40\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 和机械惯量 $J_m = 70\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 两种情况，需要用电动机补偿的

惯量分别是 $12\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 和 $-18\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。

在问题五提出的三种电流控制方法中, 电流的计算式都出现了因子 $(1 - \frac{J_m}{J_v})$, J_m 的变化必然导致此因子的变化, 进而影响到输出的控制电流。最主要的, 从能量误差的表达式

$$17) \varepsilon = E \cdot (1 - \frac{J_m}{J_v}) - \int_{t_1}^{t_2} J_s \frac{d\omega}{dt} \omega dt$$

来看, 能量误差也受到了因子 $(1 - \frac{J_m}{J_v})$ 的影响。因此, 当有多种可选的机械惯量时, 就遇到了选择哪一个机械惯量最合适的问题。在制动减速度为常数的假设下, 我们粗略地对此进行了分析。

对于问题三, 在制动减速度为常数的假设下, $\frac{d\omega}{dt} = 9.7125\text{rad/s}^2$, 角速度 ω 由下式确定:

$$\omega = 48.5625 - 9.7125 \cdot t$$

单位: rad/s 。另外由 4) 式得到:

$$4) J_s = J_v - J_m$$

代入 17) 式得到能量误差的表达式为:

$$18) \varepsilon = E \cdot (1 - \frac{J_m}{J_v}) - J_v \int_{t_1}^{t_2} (1 - \frac{J_m}{J_v}) (471.6633 - 89.0879t) dt$$

从上式来看, 能量误差与因子 $(1 - \frac{J_m}{J_v})$ 呈简单的正比例关系, 为了尽量缩小能量误差, 我们应该尽量缩小因子 $(1 - \frac{J_m}{J_v})$ 。问题二中得到的两种惯量的补偿方案所对应的因子 $(1 - \frac{J_m}{J_v})$ 的值分别是 0.2308 和 -0.3462 , 我们应该选择第一种惯量补偿方案。

下面是实例分析。将问题四中的系统的机械惯量由 $35\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 改变为 $40\text{kg} \cdot \text{m}^2$, 进行车辆制动性能检测, 依旧取前 19 组数据进行误差分析, 做出直方图如下图, 对比于问题四中的结果, 可见误差变小。

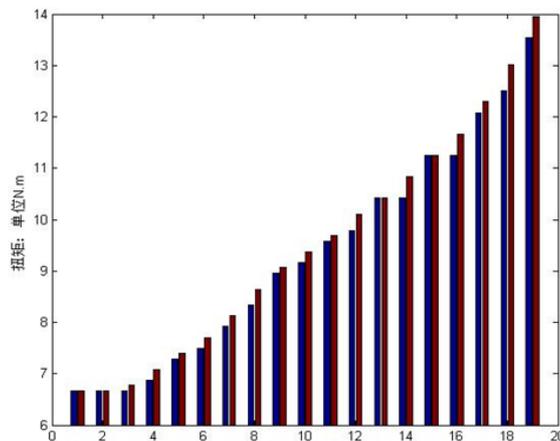


图 9 前 19 组数据

计算前19组数据的误差列为下表：

表 4 前 19 组数据的误差

序数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
误差	0	0	0.1041	0.2083	0.1041	0.2083	0.2083	0.3125	0.1042	0.2083
序数	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
误差	0.1042	0.3125	0	0.4166	0	0.4167	0.2084	0.5208	0.4168	

误差的平均值为：

$$\theta' = 0.2028$$

对比问题四中的误差平均值 $\theta = 0.3296$ ，误差变小了，可见模拟系统的机械惯量的选择影响着车辆制动性能检测的结果的精确性。

从取样时间间隔的角度分析

问题三中提出的数学模型及问题五中给出的计算机控制方法，均是基于离散采样得到制动扭矩值、角速度值，根据前一段时间的数据值来对电动机发出控制信号，来决定电动机下一时间段的输出电流值，且在这段时间 Δt 内的电动机电流保持该值，而不会实时的随着需要变化，因而实时性不好，也因此使得模拟测试的结果不精确。采样间隔 Δt 是影响模型与控制方法稳定性的重要的因素。

下面我们就讨论不同的 Δt 对结果稳定性的影响。

下表第二行为采样间隔 $\Delta t = 0.01s$ 时的数据，第三行为采样间隔为 $\Delta t = 0.02s$ 时的数据，根据得出的数据求解此时模拟试验得到结果的能量误差。将求得的结果与问题四的结果列为下表：

表 5

$\Delta t/s$	总耗能/J	绝对误差/J	相对误差
0.010	49292	2858	5.48%
0.020	49248	2902	5.56%

由上表的计算结果可见：两次模拟试验的能量误差相差不大，而且都比较小， Δt 取值的微小变化对结果的影响程度不大，绝对误差偏离 1.54%，相对误差偏离 1.45%。然而 Δt 的改变确实使得结果的能量误差更大，降低了模拟的精确性与可靠性。

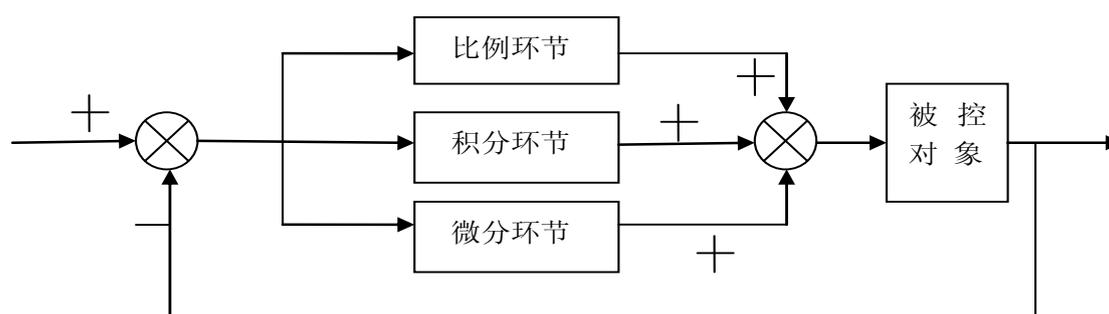
因此，在利用问题三提出的模型与问题五给出的计算机控制方法在制动台上进行车辆制动性能检测的过程中，应当取较小的采样时间间隔，提高检测精确性。

四、模型扩展

车辆制动性能测试的理想目标是：制动器试验台的模拟测试能准确无误地反应出车辆的制动性能。我们建立的模型与提出的计算机控制方法，都存在着一定的误差，主要是制动控制的过程中，未能克服时滞性对系统控制的影响，如我们的控制方法二，控制信号的发出滞后了一个采样间隔，在这个采样间隔时间内未能即时的根据制动扭矩的变化发出控制信号。因此，为了克服制动器试验台系统

控制的滞时性，使其能够更为准确、更加及时地进行电动机电流的调节控制，就必须设计更为有效的控制方法。

在控制的领域中，最常用的是PID控制方法[4]。PID控制是一种反馈控制，包含三个环节：1) 比例环节，将偏差信号放大，若系统有一个微小的偏差（如制动扭矩的微小变化），即能迅速做出反应，发出控制信号调整被控对象（如电动机的电流）；2) 积分环节，以消除系统的静态误差；3) 微分环节，根据偏差的变化趋势，来减小系统的动态误差。PID系统能更及时有效的根据可观测量的变化做出控制反应，系统控制的滞时性得到很好的改善，同时提高系统的稳定性。PID控制结构如下：



然而，P、I、D三个环节相互影响的关系是很复杂的，不能以简单的线性关系来描述，再加上实际系统的非线性和时变不确定性，使得这三个参数的手动调整比较困难。BP(back propagation)神经网络理论上可以逼近任何非线性函数，将它与传统的PID控制方法相结合可以达到良好的控制效果。通过采用BP神经网络，以闭环反馈系统的误差作为神经网络的学习误差，可以实现PID控制器参数的自适应调整。基于BP神经网络的参数在线整定的PID实时控制应用于制动器试验台的控制，是本模型扩展的一个方向。

参考文献

- [1]王先锋，惯性制动器实验台的控制系统设计及数据处理与分析，湖南大学硕士学位论文，2006.5
- [2]常明顺，汽车ABS性能监测系统的研究，吉林大学硕士学位论文，2007.5
- [3]林荣会，制动器试验台的双分流加载法，青岛建筑工程学院学报，第18卷第3期，50页——54页，1997
- [4]吴海平、敖志刚、王冠、敖卫清，基于BP神经网络的参数在线整定的PID实时控制，电脑知识与技术，第5卷19期，5245页——5273页，2009.7
- [5]易德生、李昇浩，非电系统的电模拟，210页，高等教育出版社，1987.9