

眼科病床的合理安排

摘要

本文在研究眼科病床的安排时，首先分析病人实际情况和心理，采用余弦分布时间满意度函数计算出病人对入院等待时间和术前等待时间的满意度；然后根据日平均入院人数考虑医院的利益，从而建立医院利益指数。最后由这两个数据给出综合评价指数和策略合理标准，对病床安排策略进行评价。当综合评价指数大于 0.9 时，策略合理。

问题一：对于题中 FCFS 策略，病人的平均满意度为 0.81（0.8 以上为满意），但单眼白内障病人满意度均不到 0.8，医院利益指数为 0.78，综合评价指数为 0.8，方案不合理。

问题二：我们结合病人的公平性和优先性，在原题设条件下，提出“引入时延的 FCFS 改进算法”：对手术时间固定的白内障病人进行时延，再把当天及以前余留病人一起按照 FCFS 原则和病人优先级（外伤 > 白内障双眼 > 白内障 > 青光眼、视网膜疾病）进行排序，再安排次日床位。经过对病床的重排，病人平均满意度达到 0.89，医院利益指数为 0.95，综合指数为 $0.92 > 0.9$ ，因此新策略比较合理。

问题三：当病床安排策略已定的时候，影响一个病人入院时间的就是在他之前的还未出院的病人（正在住院，以及排在他之前等待入院的病人）的术后恢复时间的长短。我们根据统计规律找出各类病人回复时间波动范围，对未出院病人取最小、最大值，对在当前病人之后来门诊的病人采取轮盘赌算法根据统计规律随机产生，由此求出当前病人的大致入院时间范围。

问题四：取消周六、日的手术时间后，按照原模型求解，发现综合评价指数降为 0.89，不太合理。由此提出调整白内障手术的时间，经分析调整为周二、周四时，模型一的策略最优，且合理。

问题五：先根据一段时间内某类病人每天占用病床数之和除以这段时间，得到该类病人的预测床位数。在此基础上微调，找到使所有病人平均逗留时间最短的病床分配比例为：{外伤, 10.1%, 8}, {白内障, 13.9%, 11}, {白内障（双眼）, 20.3%, 16}, {青光眼, 12.7%, 10}, {视网膜疾病, 43.0%, 34}。

模型拓展，对算法一进行改进，提出“动态延时因子 EDD 算法”。将每天排队病人按照其门诊时间加上当天虚拟入院时间后的日期进行排序后入院。改进后优化程度明显，病人平均满意度为 0.93，医院利益指数为 0.97，综合评价指数为 0.95，合理。因此算法二的策略为最优病床安排策略。

关键词：余弦分布时间满意度函数 医院利益指数 延时因子 引入时延的 FCFS 改进算法 动态延时因子 EDD 算法 预测床位数 最短逗留时间

目录

摘要	1
1. 问题重述.....	4
2. 模型假设及符号说明.....	4
2.1 模型假设	4
2.2 符号说明	4
3. 问题一	5
3.1 问题分析.....	5
3.1.1 背景分析	5
3.1.2 病人满意度分析.....	5
3.1.3 医院利益分析.....	6
3.1.4 病床安排策略的优劣分析.....	6
3.2 评价体系.....	7
3.2.1 满意度算法.....	7
3.2.2 医院日平均入院人数算法.....	8
3.2.3 FCFS 策略评价	9
3.3 评价系统稳定性分析.....	10
4. 问题二.....	10
4.1 模型建立.....	10
4.2 模型分析及求解	11
4.3 结果评价和分析	13
5. 问题三.....	14
5.1 问题分析.....	14
5.2 问题求解.....	16
5.3 结果分析.....	16
6. 问题四.....	17

6.1	病床安排策略	17
6.2	白内障手术时间分析	18
6.3	结果分析及评价	18
7.	问题五	19
7.1	问题分析	19
7.2	模型建立	19
7.3	模型求解	20
8.	模型拓展	21
8.1	算法二	21
8.2	模型求解及结果分析	21
8.3	算法比较	22
9.	参考文献	23

1. 问题重述

医院就医排队是大家都非常熟悉的现象，我们现通过考虑某医院眼科病床的合理安排的数学建模问题，提出安排策略，尽量减少病人排队等待时间。

该医院眼科门诊每天开放，住院部共有病床 79 张。眼科手术主要分四大类：白内障、视网膜疾病、青光眼和外伤。

当前该住院部对全体非急症病人是按照 FCFS (First come, First serve) 规则安排住院，但等待住院病人队列却越来越长，医院方面希望能通过数学建模来解决该住院部的病床合理安排问题，以提高对医院资源的有效利用。

问题一：试分析确定合理的评价指标体系，用以评价该问题的病床安排模型的优劣。

问题二：试就该住院部当前的情况，建立合理的病床安排模型，以根据已知的第二天拟出院病人数来确定第二天应该安排哪些病人住院。并对你们的模型利用问题一中的指标体系作出评价。

问题三：作为病人，自然希望尽早知道自己大约何时能住院。能否根据当时住院病人及等待住院病人的统计情况，在病人门诊时即告知其大致入住时间区间。

问题四：若该住院部周六、周日不安排手术，请你们重新回答问题二，医院的手术时间安排是否应作出相应调整？

问题五：有人从便于管理的角度提出建议，在一般情形下，医院病床安排可采取使各类病人占用病床的比例大致固定的方案，试就此方案，建立使得所有病人在系统内的平均逗留时间（含等待入院及住院时间）最短的病床比例分配模型。

2. 模型假设及符号说明

2.1 模型假设

- 1) 病人的满意度只受入院前等待时间和手术前等待时间影响。
- 2) 在一定的时间间隔内，来到医院的病人数量只与这段时间间隔的长短有关，而与这段时间间隔的起始时刻无关。
- 3) 病人的到达率与病床占用程度无关，无论住院部中有多少病人，病人的到达率不变。
- 4) 病人出院当天即可安排另一病人入院。
- 5) 每天都有一定数量的病人出院，确保前一天问诊的外伤病人有床位。

2.2 符号说明

$S(i)$ 病人 i 的总满意度

$S_1(i)$	病人 i 的第一满意度
$S_2(i)$	病人 i 的第二满意度
H	医院利益指数
W	综合评价指数
$T_0(i)$	病人 i 的门诊时间
$T_1(i)$	病人 i 的入院时间
$T_2(i)$	病人 i 的第一次手术时间
$T_3(i)$	病人 i 的出院时间
$t_1(i)$	入院等待时间（从门诊治疗到入院）（天）
$t_2(i)$	手术等待时间（从入院到手术）（天）
L	病人等待时间下限（等待时间小于 L 的病人，满意度为 1）（天）
U	病人等待时间上限（等待时间大于 U 的病人，满意度为 0）（天）
n_1 、 $N_1 \sim n_5$ 、 N_5	外伤、单眼白内障、双眼白内障、青光眼、视网膜疾病病人的满意人数、总人数（人）
$\sigma_1 \sim \sigma_5$	外伤、单眼白内障、双眼白内障、青光眼、视网膜疾病病人的病床分配比例
P_T	日期 T 当天住院人数（人）

3. 问题一

3.1 问题分析

3.1.1 背景分析

“三长一短”（挂号时间长、候诊时间长、交费时间长、看病时间短）一直是中国各大医院的顽疾，也成为影响病人满意度的主要因素。

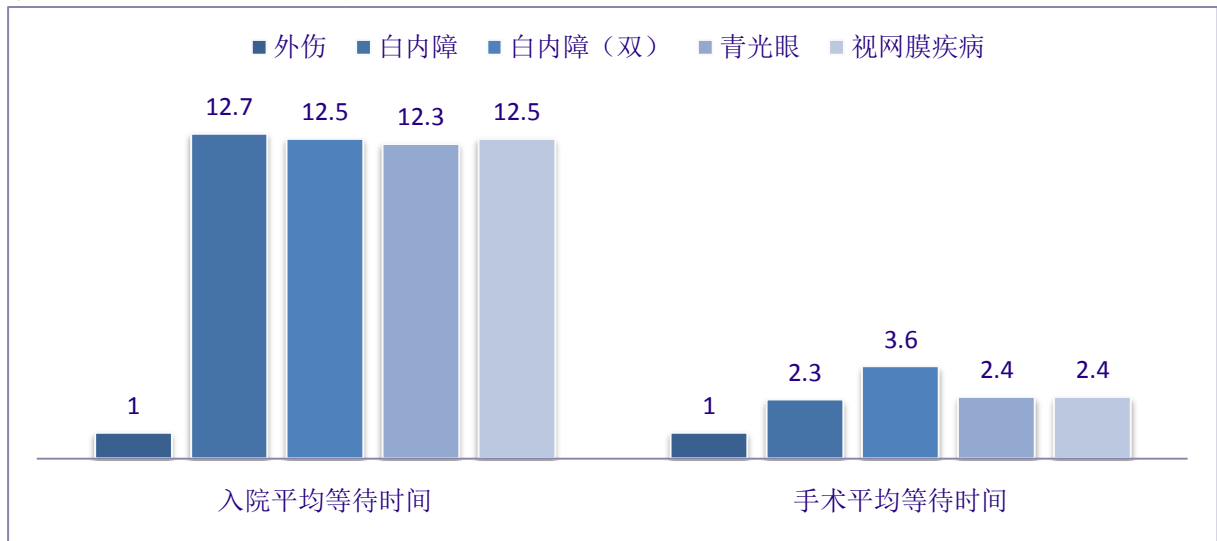
现有某医院住院部采取 FCFS 的方案安排病人住院，却使等待病人越来越多。为了使该医院的眼科病人尽快住院，并得到合理安排的床位，我们首先将设计一种评价体系，找出现有安排方案的优劣，然后设计出一套合理的病床安排方案，以解决住院部的排队难题。

3.1.2 病人满意度分析

通常，医院影响病人满意度的因素主要有：等待及治疗时间、就医环境、技术水平、

医师水平、护士态度、收费标准等等。在此题中，可以看作除等待时间以外，病人对于其他条件的满意度相同。

但是对于不同的病人，由于病情不同，最长的等待时间也不同。根据已知数据（即采取 FCFS 策略）分析可得：



由上图可知，外伤病人属于急诊，最多等待 1 天就必须住院治疗，而白内障、青光眼和视网膜疾病的病人则对等待时间要求不太严格，等待时间可以相对较长。因此根据入院等待时间可分为两个公式计算病人第一满意度。

再根据题目要求可知，手术前准备时间为：外伤 1 天；白内障 1~2 天；青光眼和视网膜疾病 2~3 天。因此根据手术等待时间用三个公式计算病人第二满意度。

我们采用病人两种满意度的均方根的值作为病人的总体满意度。

综上所述，因为影响第一满意度的入院等待时间直接造成等待的病人数变化，而影响第二满意度的手术等待时间会对病床的有效利用率产生影响，因此，可以用第一满意度和第二满意度来评价病床安排策略的优劣。

3.1.3 医院利益分析

一个优秀合理的床位安排策略不仅能使病人有较高的满意度，并且还可以给医院带来更多的利益。

因此从医院角度考虑，如果让病人长时间等待入院，时间太长可能会造成病人流失，使医院的利益减少。反之，如果能合理安排床位，提高病床的有效利用率，这样在相同时间内，可以接待更多的病人，从而提高医院的利益。

我们通过分析医院日平均接待入院人数，用理想化的接待人数和现实接待人数的比值来表示医院的利益指数 H。通过 H，就可以判断不同策略对医院利益的影响。

3.1.4 病床安排策略的优劣分析

一种策略的优劣性取决于所有病人的整体满意度和医院的利益，我们给出一种综合评价指数 W 的计算方式：

$$W = 0.4 \times H + 0.6 \times \frac{\sum_{i=1}^N S(i)}{N}$$

因此给出以下规则：

规则一：病人的满意度在 80%以上为满意，60%~80%为一般满意，60%以下为不满意。

规则二：策略的综合评价指标达到 0.9 时，可判定该病床安排策略是合理的。

3.2 评价体系

3.2.1 满意度算法

该评价体系是基于病人的满意度来分析策略的优劣，因此首先需要给出病人满意度的算法。

在拟合病人满意度函数时，应遵循以下原则：

1) 客观性原则

时间满意度函数应该要表达不同病人对于等待时间的满意度变化，因此模型的适应性非常重要，要求既能有效表示出满意度的变化又要表示出不同病人各自的特点。并且函数的参数必须根据医院的实际情况和病人的实际等待时间这些数据，反复拟合得到，不能主观臆断。

根据北京同仁医院眼科中心的调查资料显示^[1]，病人在入院前根据不同情况应在家休息准备一段时间，通常时间为两周。再对病人心理进行分析，等待时间越长，其满意度会越低，在等待时间达到应等待的两倍时，视为其忍耐限度。因此可得出 24~25 天后，病人的满意度几乎为 0。

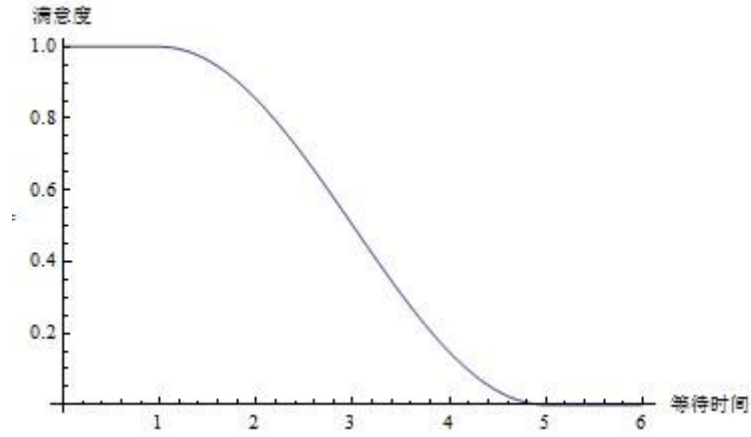
2) 简单性原则

当复杂函数的参数很难确定或等待时间和满意度之间的关系可以由更简单的函数来估计时，应该在客观性原则的基础上使用简化的时间满意度函数，以避免过于复杂的计算或错误的估计函数参数。

3) 可行性原则

为了正确地拟合时间满意度函数，不仅要考虑不同病人的特征，也要结合函数的特点，以确保病人等待时间向时间满意度转换的可行性。

根据以上原则，我们经过多次实验、拟合，最后决定采用余弦分布时间满意度函数来计算。余弦分布时间满意度函数是从余弦函数曲线的 $\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{3\pi}{2}$ 的部分截取得到的，该曲线在阈值 L（L 之前满意度为 1）和 U（U 之后满意度为 0）附近的时间满意度变化较小，曲线中间部分的斜率较大。符合该题中病人满意度的变化，例如：



由问题分析可知，满意度 S 分为第一、第二满意度 S_1 、 S_2 两部分，分别受入院等待时间 t_1 和手术等待时间 t_2 影响。

对于第一满意度，可分为外伤和非外伤的情况进行处理，并且由于外伤病人为急诊，必须立即送入住院部，因此默认外伤病人的满意度为 1，由此得出计算公式：

$$S_1 = \begin{cases} 1 & t_1 \leq L \text{ 或 外伤病人} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \left[\frac{\pi}{U-L} \left(t_1 - \frac{U+L}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \right) & L \leq t_1 \leq U \\ 0 & t_1 \geq U \end{cases} \quad (1)$$

其中， $L=1$ ， $U=25$ （ L 和 U 值，均通过题目给定的等待时间和分析已知数据多次模拟求得）。

对于第二满意度，同样采用余弦分布时间满意度函数，计算公式同上。但由于手术准备时间的不同，我们将函数的 L 和 U 两个阈值进行修改：外伤病人仍然优先处理，默认满意度为 1；白内障病人 $L=2$ ， $U=7$ ；青光眼及视网膜疾病的病人 $L=3$ ， $U=7$ 。

最后由 S_1 、 S_2 的均方根求出病人总的满意度：

$$S = \sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{2}} \quad (2)$$

3.2.2 医院日平均入院人数算法

首先我们考虑一种最理想的情况：每天来门诊的病人都可以在次日入院，即没有排队等候的病人，且他们在医院逗留时间最短。此时医院的日平均入院人数即为：门诊病人数与总时间之比。

然后考虑某策略的医院日平均入院人数，为：实际入院人数和总时间之比。

用 H 来表示医院利益指数（两人数均在相同时间内考虑）：

$$H = \frac{\text{实际入院人数}}{\text{门诊病人数}}$$

3.2.3 FCFS 策略评价

首先根据已知数据求出已经入院且接受手术的每个病人入院等待时间 t_1 和手术等待时间 t_2 。

然后用 mathematica 软件，根据公式 (1) (2) 计算出每个病人的满意度，得出平均满意度为：

$$\frac{\sum_{i=1}^{428} S(i)}{428} = 0.81$$

所有满意度分布情况如下：（病人总人数为 428 人）

满意度 人数	0~0.6	0.6~0.8	0.8~1
第一满意度	326	39	63
第二满意度	0	19	409
总满意度	9	204	215

病人类型	外伤	白内障	白内障（双）	青光眼	视网膜疾病
病人平均满意度	1	0.78	0.74	0.81	0.80

再根据病人的入院时间分析得出，在 8 月 25 日至 9 月 11 日之间的 49 天内，门诊总人数为 530 人，总共入院的人数有 415 人。因此，日平均接待人数为 8.65 人，医院利益指数 $H=0.78$ 。

由计算结果可以看出，该病床安排策略的优点有：

- 1) 对外伤病人处理很及时。
- 2) 采用 FCFS 策略，很好地体现了排队的公平性。
- 3) 病人从入院到手术等待的时间比较短，在较合理的时间内进行了手术。

缺点有：

- 1) 病人从门诊就诊后到入院的等待时间太长，非外伤的病人等待时间都超过了 10 天。
- 2) FCFS 策略虽然体现了公平性，但是由于白内障病人有固定的手术时间（特别是双眼白内障患者），所以这种策略有时反而会导致病人入院等待时间更长。
- 3) 由评价体系还可以算出，该策略中，满意人数仅占总人数的 52.4%。

最后计算出综合评价指数：

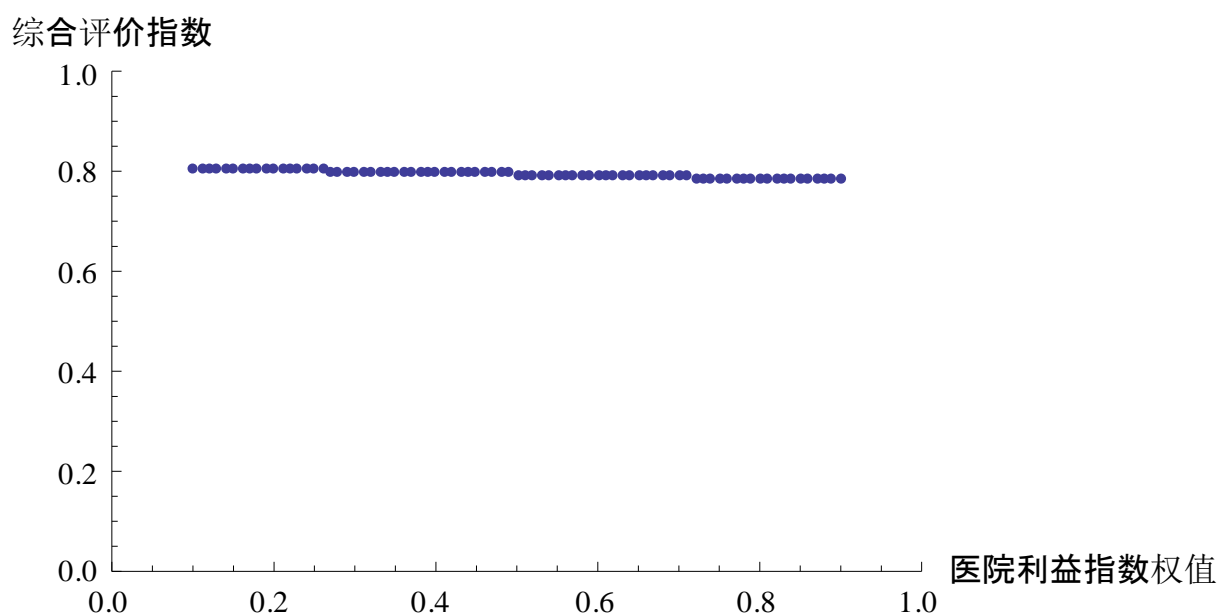
$$W = 0.4 \times H + 0.6 \times \frac{\sum_{i=1}^N S(i)}{N} \approx 0.80$$

根据规则二，综合评价指数 W 必须在 0.9 以上，此策略才是合理的，而这种 FCFS 策略算出的 $W=0.80$ ，远小于 0.9，因此这种策略从病人满意度和医院的利益两方面来考虑，是不合理的。

3.3 评价系统稳定性分析

评价系统是根据综合评价指数的大小来决定一个策略的合理性，因此在稳定性分析时，我们主要关注综合评价指数的权重向量变化时对其大小的影响。

现根据 FCFS 策略的计算结果，将医院利益指数的权重系数从 0.1 以 0.01 的步长变化到 0.9，观察综合评价指数的变化情况：



可以看出，虽然医院利益指数的权值进行了较大的变动，但是综合评价指数总体趋势不变。由此可见该评价系统模型有较好的稳定性。

4. 问题二

4.1 模型建立

该题中需要设计病床的安排方案使病人的满意度尽量高，因此要尽量缩短病人的入院和术前等待时间。根据满意度的计算公式，可得出以下模型：

决策变量： $t_1(i)$ 、 $t_2(i)$ ($i = 1, 2 \dots N$)

$$\text{目标函数: } \text{Max } W = 0.4 \times H + 0.6 \times \frac{\sum_{i=1}^N S(i)}{N} \quad (i = 1, 2 \dots 5)$$

$$\text{约束条件: } \text{外伤病人: } t_2 = 1$$

$$\text{白内障病人: } t_2 \geq 1$$

$$\text{青光眼、视网膜疾病病人: } t_2 \geq 2$$

星期一、三只做白内障手术

$$P_T \leq 79$$

$$t_1(i) = T_0(i) - T_1(i) \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

$$t_2(i) = T_1(i) - T_2(i) \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

4.2 模型分析及求解

根据题目分析可知，外伤病人属于急诊，必须第二天立即入院治疗，所以有绝对的最高优先权。又经过分析可知，每天的外伤患者很少，他们的提前入院不会对后面排队的病人满意度有太大的影响，因此在这里采用优先级队头服务(head of line, HOL)原则，每天都首先满足外伤病人。

白内障患者手术日期固定在周一和周三，且术前准备时间只有1~2天，因此安排的入院时间要尽量靠近手术日期。而其他病人时间相对灵活，且术前准备时间有2~3天，分析可知无论在周几入院，都可以在最长术前准备时间之内手术。

通过对不同病人的入院时间分析，我们发现，如果像原FCFS策略一样的话，会导致部分白内障病人住院很长时间才手术，造成了床位的浪费。因此提出“引入时延的FCFS改进算法”，每天对排队的白内障患者的门诊时间进行加上时延再和其他病人的门诊时间进行排序，由此按照FCFS规则和病人的优先级，确定次日的入院病人的次序。

每天各类病人的时延天数是根据其最佳入院时间来确定的。例如白内障病人的手术时间为周一和周三，术前准备时间是1~2天，因此最佳入院时间是周一、周二、周六和周日。在非最佳入院时间时，我们要对其加上一个时延，不与其过早入院，而把床位让给处在最佳入院时间的病人，并且离最佳入院时间越远，时延越大，使其尽量在靠近最佳入院时间的时候入院。

由此提出决定时延天数的规则：

时延规则一：离最佳入院时间越远，时延越大。

时延规则二：一周内最佳入院时间越多，非最佳入院时间的时延越大。

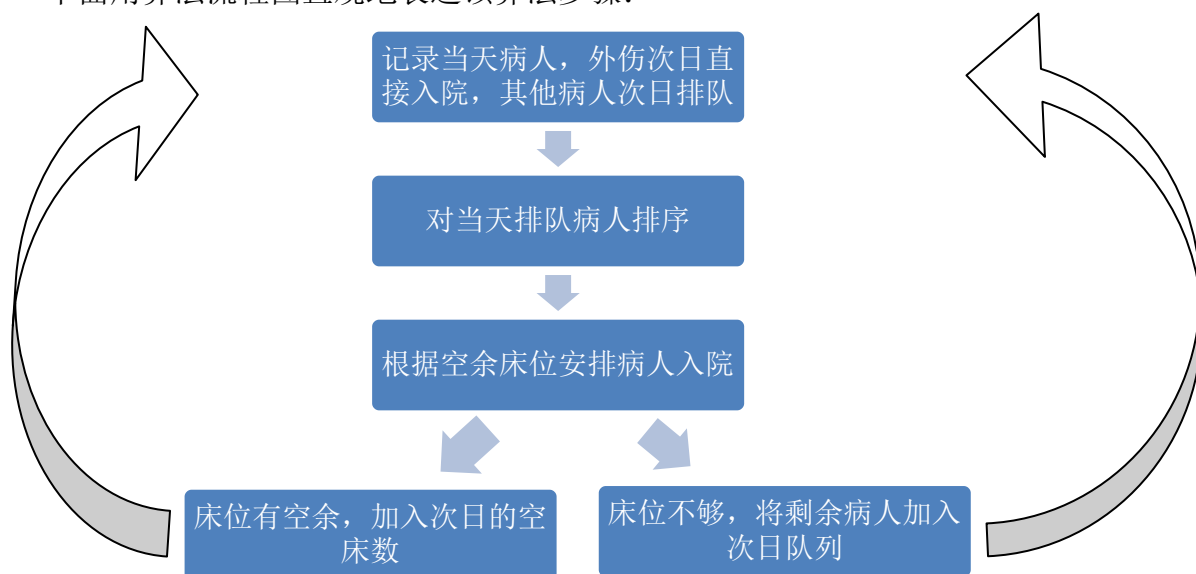
白内障患者门诊时间的时延表如下：

日期 时延天数	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
单眼白内障病人	0	0	11	9	7	0	0
双眼白内障病人	14	11	8	5	2	0	0
青光眼、视网膜疾病病人	3	3	0	0	0	5	5

下面给出“引入时延的 FCFS 改进算法”的具体步骤：

- 1) 记录当天的就诊病人，若有外伤患者，在预计次日空余床位的允许范围内，优先安排到次日入院。其余病人加入次日排队队列。
- 2) 对当天排队病人按照门诊时间进行排序（单双眼白内障的门诊时间要根据当天具体时期按照时延表进行时延，然后再参与排序），对于相同日期的病人优先程度为：双眼白内障、单眼白内障、其他疾病。
- 3) 根据当天空余床位，安排排序靠前的病人入院，直到病床安排满。
- 4) 转 1) 进行下一天的安排。

下面用算法流程图直观地表达该算法步骤：



在这种改进算法中，由于采用了 FCFS 规则排序，体现了公平性；而根据病人的优先级不同，又进行了一些调整，确保了各优先级别病人的权益。

由此得到病床安排策略，由于结果数据量太大，现节选原序列中任意连续 10 位病人的策略改进前后的时间进行比较：

序号	类型	原门诊时间	原入院时间	原第一次手术时间	原出院时间
232	白内障(双眼)	2008-8-7	2008-8-21	2008-8-25	2008-8-30
233	外伤	2008-8-7	2008-8-8	2008-8-9	2008-8-12
234	青光眼	2008-8-7	2008-8-22	2008-8-24	2008-9-5
235	视网膜疾病	2008-8-8	2008-8-22	2008-8-24	2008-9-2
236	外伤	2008-8-8	2008-8-9	2008-8-10	2008-8-14
237	视网膜疾病	2008-8-8	2008-8-22	2008-8-24	2008-9-7
238	视网膜疾病	2008-8-8	2008-8-22	2008-8-24	2008-9-6
239	白内障(双眼)	2008-8-8	2008-8-22	2008-8-25	2008-8-30
240	视网膜疾病	2008-8-8	2008-8-22	2008-8-24	2008-8-30
241	视网膜疾病	2008-8-8	2008-8-22	2008-8-24	2008-8-29
.....					
序号	类型	现门诊时间	现入院时间	现第一次手术时间	现出院时间
232	白内障(双眼)	2008-8-7	2008-8-15	2008-8-18	2008-8-23
233	外伤	2008-8-7	2008-8-8	2008-8-9	2008-8-12
234	青光眼	2008-8-7	2008-8-14	2008-8-16	2008-8-23
235	视网膜疾病	2008-8-8	2008-8-15	2008-8-17	2008-8-26
236	外伤	2008-8-8	2008-8-9	2008-8-10	2008-8-14
237	视网膜疾病	2008-8-8	2008-8-15	2008-8-17	2008-8-31
238	视网膜疾病	2008-8-8	2008-8-15	2008-8-17	2008-8-30
239	白内障(双眼)	2008-8-8	2008-8-15	2008-8-18	2008-8-23
240	视网膜疾病	2008-8-8	2008-8-15	2008-8-17	2008-8-23
241	视网膜疾病	2008-8-8	2008-8-15	2008-8-17	2008-8-22
.....					

4.3 结果评价和分析

由结果对比可知，除了外伤病人仍然以急诊特殊处理，没有变化以外，其他病人的时间均有不同程度的缩短。下面具体分析该策略中病人的满意度：

首先根据每个病人的满意度求出所有病人的平均满意度为 0.89，与原策略的 0.81 相比提高了 10%，有比较明显的优化效果。

然后具体分析病人满意度的分布：

满意度 人数	0~0.6	0.6~0.8	0.8~1
第一满意度	121	122	287
第二满意度	0	21	509
总满意度	8	89	433

病人类型	外伤	白内障	白内障（双）	青光眼	视网膜疾病
病人平均满意度	1	0.82	0.83	0.92	0.93

再分析医院的入院人数及时间可知，从8月25日到9月11日的49天内，门诊病人数为530，医院一共接待了500位病人。由此计算出，该策略下医院的日平均接待病人数为10.2，医院利益指数H为0.95。

综合评价指数为：

$$W = 0.4 \times H + 0.6 \times \frac{\sum_{i=1}^N S(i)}{N} \approx 0.92$$

最后根据规则二，因为该策略的 $W > 0.9$ ，可判断这种“引入时延的 FCFS 改进算法”是合理的。

新策略与原策略相比的优点有：

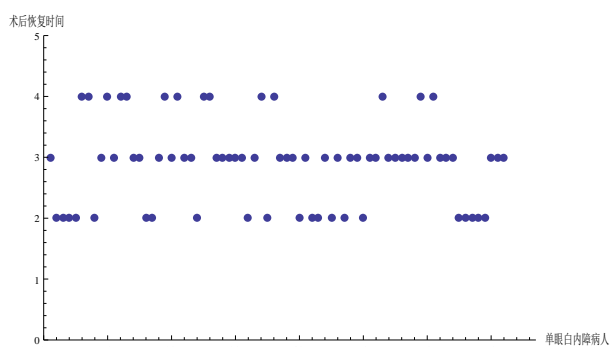
- 1) 病人的第一满意度大幅度提高，从原来仅有14.7%的病人满意增加到现在的57.4%。
- 2) 各类病人的平均满意度均有提高，青光眼和视网膜疾病的病人满意度提高甚至超过了0.1。
- 3) 所有病人中满意度高于0.8的人数占总人数的比例从52.4%提高到了86.6%。
- 4) 病床的有效利用率达到最高，使医院利益指数为0.95，并最大限度减少了排队人数。

5. 问题三

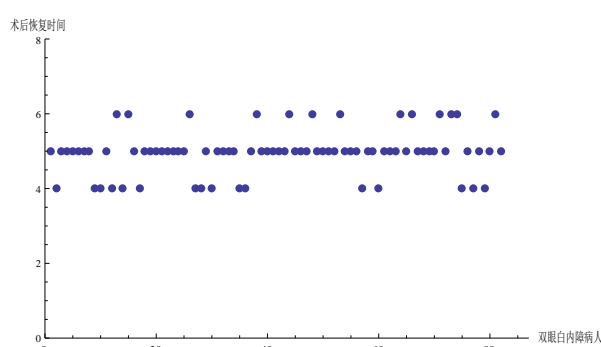
5.1 问题分析

首先根据已知的数据，分析得出每类病人的术后恢复时间（从第一次手术时间到出院的时间）分布情况：

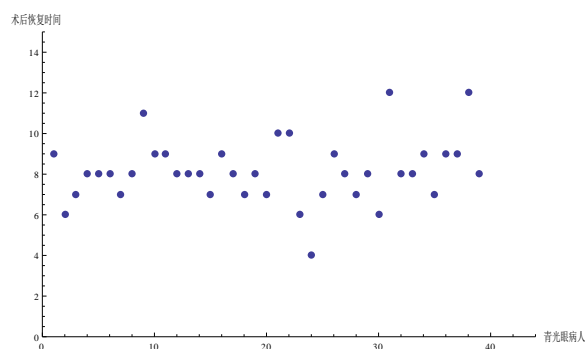
单眼白内障病人：



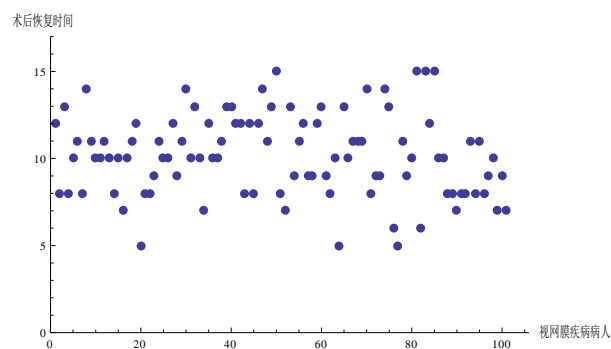
双眼白内障病人：



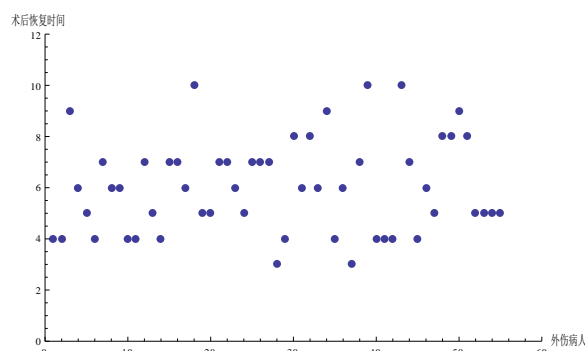
青光眼病人:



视网膜疾病病人:



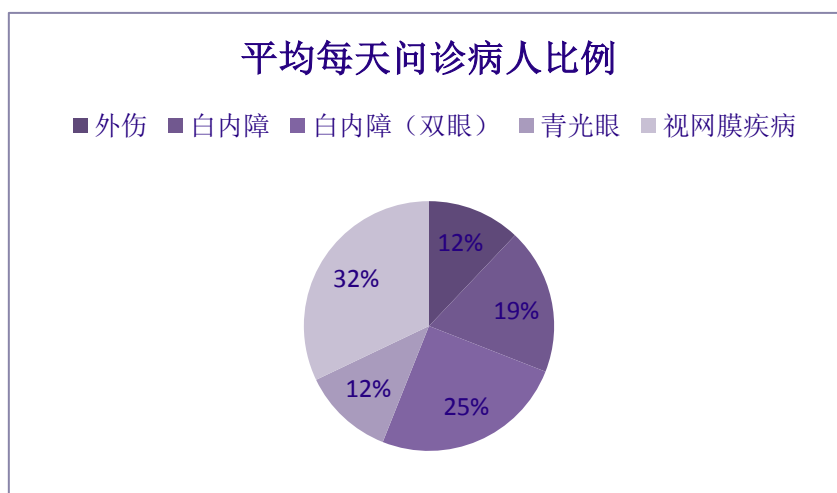
外伤病人:



由上图可以看出，每一类病人的术后恢复时间都不是确定的。为了能大致推算出当前病人的入院时间，我们算出了每类病人的术后恢复时间的波动范围：

病人类型	外伤	单眼白内障	双眼白内障	青光眼	视网膜疾病
术后恢复时间 (天)	[3, 10]	[2, 4]	[4, 6]	[4, 12]	[5, 15]

然后，再根据已有数据统计出每天每类问诊病人所占的比例，大致如下：



由上图比例，再根据类似于遗传算法中的选择策略轮盘赌算法随机产生当前病人之

后到来的问诊病人。由此推算出其入院大致时间范围。

5.2 问题求解

这样，当确定了每类病人的术后恢复时间范围后，就可以根据当前的所有病人状况，大致推算出该病人的出院时间范围。由此对问题一的模型进行修改，采用以下算法：

- 1) 该病人之前未出院的病人（即当时住院病人和正在等待的病人）术后休息时间取最小值。
- 2) 用轮盘赌算法随机产生之后到达病人。
- 3) 按照“引入时延的 FCFS 改进算法”进行床位安排，直到该病人入院，记录入院时间。
- 4) 该病人之前未出院的病人（即当时住院病人和正在等待的病人）术后休息时间取最大值。
- 5) 用轮盘赌算法随机产生之后到达病人。
- 6) 按照“引入时延的 FCFS 改进算法”进行床位安排，直到该病人入院，记录入院时间。

两个入院时间即为当前病人的入院时间范围的边界值，这样以来就可以在病人门诊时就告诉其大致的入院时间范围。

5.3 结果分析

根据以上修改算法，我们随机确定若干位病人，然后给出其大致的入院时间范围。计算结果如下：

序号	类型	门诊时间	预计入院时间
102	青光眼	2008-7-23	2008-8-2~2008-8-5
204	白内障	2008-8-5	2008-8-10~2008-8-15
313	视网膜疾病	2008-8-18	2008-8-20~2008-8-27
.....			

现对结果进行验证，在模型一产生的病床安排策略中，查找出这些病人的实际入院时间：

序号	类型	门诊时间	实际入院时间
102	青光眼	2008-7-23	2008-8-3
204	白内障	2008-8-5	2008-8-15
313	视网膜疾病	2008-8-18	2008-8-23
.....			

多次操作、查找发现，病人的实际入院时间皆与预计入院时间相吻合，结果稳定度为 100%。

6. 问题四

6.1 病床安排策略

在取消了周六、周日的手术时间后，白内障病人因手术时间限制而增加的时延也会相应改变。同样，由于手术时间的减少，青光眼病人和视网膜疾病病人的手术时间也受限了，在周四、周五入院的非外伤病人都必须等到周一才能进行手术，均超过了各自的术前准备时间，因此排队序列由各类病人的优先级确定。

经过重新分析，由时延规则一、二给出这种情况下的时延天数：

日期 时延天数	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
单眼白内障病人	2	0	2	0	4	2	2
双眼白内障病人	12	9	6	4	2	0	0
青光眼、视网膜疾病病人	0	0	0	4	4	2	2

由修改后的模型一算法得出的结果如下：

满意度 人数	0~0.6	0.6~0.8	0.8~1
第一满意度	188	139	203
第二满意度	0	20	510
总满意度	7	129	394

病人类型	外伤	白内障	白内障（双）	青光眼	视网膜疾病
病人平均满意度	1	0.83	0.81	0.86	0.86

病人的平均满意度为 0.86，在 49 天内，医院接待人数为 486 人，日平均接待人数为 9.9 人，医院利益指数 H 为 0.92。

综上，可得出这种策略的综合评价指数为：

$$W = 0.4 \times H + 0.6 \times \frac{\sum_{i=1}^N S(i)}{N} = 0.89$$

根据规则二，当 W 高于 0.9 的时候，才能判断当前策略合理，现综合评价指数 W 为 0.89，虽然较高，但是还是说明此策略并不十分合理。

经过分析发现，导致该策略综合评价指数不到 0.9 的主要原因是周末手术时间的取消和周一、周三是白内障手术时间，致使青光眼和视网膜疾病病人在这较长一段时间内无法进行手术，因此想到对白内障手术时间进行修改，讨论其最优手术时间。

6.2 白内障手术时间分析

在这个问题中，我们要分析在取消了周六、周日的手术时间后，不同的白内障手术时间的安排对于病床安排策略的影响。

因为白内障手术的术前准备为 1~2 天，且白内障双眼病人需要连续做两次手术，因此，将白内障手术时间的间隔仍然定为一天才能同时满足单双眼白内障病人等待时间最短。由此手术时间安排方案有以下三种：

方案 A：周一、周三进行白内障手术。

方案 B：周二、周四进行白内障手术。

方案 C：周三、周五进行白内障手术。

由于周末手术的取消，使所有病人的手术时间都受到了限制。此时如果再采用时延的方式排序，不同的手术时间就需要采用不同的时延权值，从而产生了两个变量。为了单独考虑手术时间对病床安排策略的影响，在这个问题中，将所有时延改为 0，采用单一变量法来研究手术时间。

6.3 结果分析及评价

经过对模型一算法的修改，包括周末手术时间的取消和白内障手术时间的重排，分别计算出三种手术时间的病床安排方案，并由评价体系分析其优劣。

	病人平均满意度	医院利益指数	综合评价指数	总等待人数
方案 A	0.846	0.891	0.864	3895
方案 B	0.853	0.892	0.869	3811
方案 C	0.850	0.896	0.868	3824

（注：总等待人数为每天等待人数之和。）

从上表可以看出，在医院利益指数和综合评价指数非常接近时，方案 B 的病人平均满意度最高，并且总等待人数最少。因此将白内障手术时间调整为周二和周四，可以在取消周末手术时间后，让病床安排策略更优。

7. 问题五

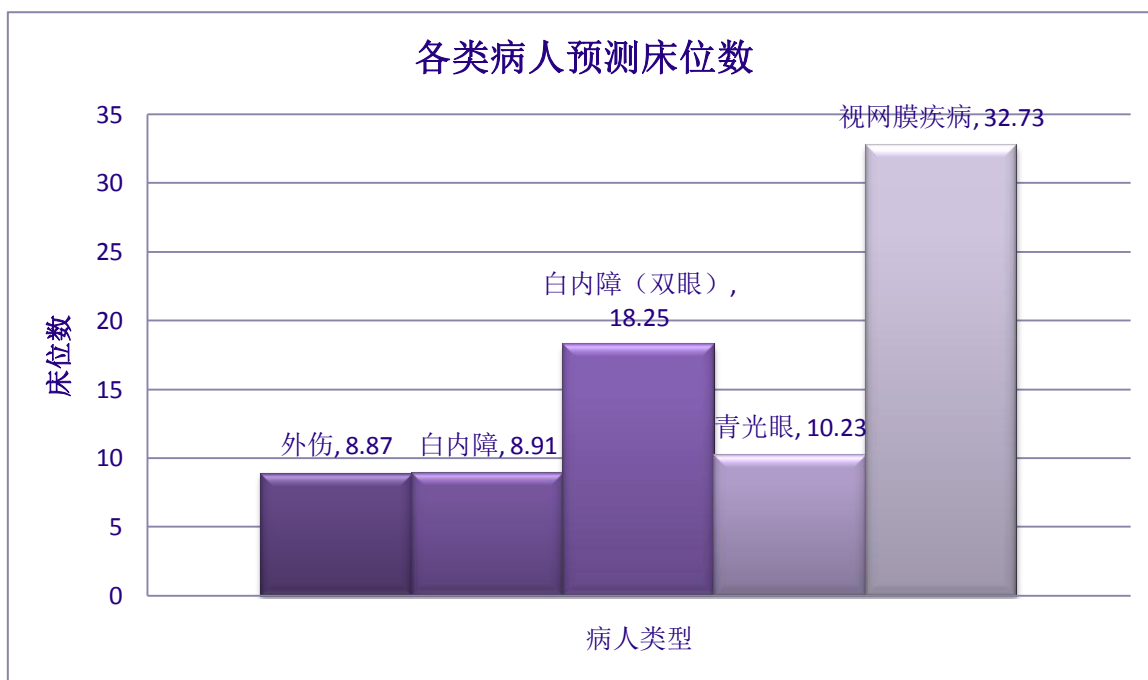
7.1 问题分析

为了便于管理和让病床得到更有效的分配，现将医院的 79 张病床按病人类型进行划分，让每类病人所占用的病床数大致固定。这样排队的病人都按照各自的类型分开排队。

影响病床分配比例的主要为每类病人的人数和其在院逗留时间，我们根据文献提出每类病人的预测床位数计算公式^[2]：

$$\text{预测床位数} = \frac{\sum \text{该类病人每天占用床位数}}{\text{总时间}}$$

由上述公式预测结果如下：



因为上述数据由算法一的结果统计得出，比较接近最佳分配比例，因此可以直接在此预测床位数的基础上调整，找到让所有人平均逗留时间最短的病床分配比例。

7.2 模型建立

用 $\sigma_1 \sim \sigma_5$ 分别表示外伤、单眼白内障、双眼白内障、青光眼、视网膜疾病病人的病床分配比例，则病床分配模型如下：

决策变量: σ_i ($i = 1 \dots 5$)

目标函数: $\text{Min } \frac{\sum_{i=1}^n [t_1(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5) + t_2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5)]}{n}$

约束条件: $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 = 79$

外伤病人: $t_2 = 1$

白内障病人: $t_2 \geq 1$

青光眼、视网膜疾病病人: $t_2 \geq 2$

星期一、三只做白内障手术

$P_T \leq 79$

$t_1(i) = T_0(i) - T_1(i)$ ($i = 1, 2 \dots 349$)

$t_2(i) = T_1(i) - T_2(i)$ ($i = 1, 2 \dots 349$)

7.3 模型求解

首先我们需要算出每类病人的理想最短逗留时间，作为床位分配比例调整的标准。根据各自的术前准备时间和术后恢复时间的不同，其最短逗留时间为：

病人类型	外伤	白内障	白内障（双眼）	青光眼	视网膜疾病
理想最短逗留时间	5	4	8	8	9

然后由分析得出，初始病床分配数：

病人类型	外伤	白内障	白内障（双眼）	青光眼	视网膜疾病
病床数	9	9	18	10	33

由于每个病人都是到该类型的病床区域排队等待，因此队伍中等待病人的优先级相同，可以看为五个相对独立的小医院，每个医院采用 FCFS 策略进行入院。一次模拟结束后再根据结果算出每类病人及所有病人的平均逗留时间，用该类病人总数乘以相差时间得到该比例下多逗留的总时间。由此对病床分配方案进行微调，然后再次模拟，直到找到最优比例。具体步骤为：

- 1) 在基础比例上，将待定床位分配给各类病人。
- 2) 用 FCFS 策略使各类病人相对独立地排队入院。
- 3) 计算各类病人和所有病人的平均逗留时间。
- 4) 与理想最短逗留时间相比，将给多逗留时间最多的病人分配更多的床位。

- 5) 将分配方案调整后，转到第 2 步再次进行模拟。直到让所有病人的平均逗留时间最短。

最终计算得到使所有病人平均逗留时间最短的床位分配方案为：

病人类型	外伤	白内障	白内障（双眼）	青光眼	视网膜疾病
床位分配比例	10.1%	13.9%	20.3%	12.7%	43.0%
实际分配床位数	8	11	16	10	34

8. 模型拓展

8.1 算法二

在算法一中，每天排队病人的次序时根据其门诊时间加上时延来进行排序。为了能更好地缩短每个病人的住院时间，以便提高病床的有效利用率，我们又提出“动态时延因子 EDD 算法”^[3]，即每天对排队病人进行排序时，按照其虚拟住院时间和门诊时间来排。

虚拟住院时间即为假设该病人在当天入院，在这种安排下，他到出院为止的住院时间，不同病人在不同日期的虚拟住院时间是动态变化的。按照这种虚拟的住院时间排序后，我们便可以保证每天入院的病人都是当前排队病人当中住院时间最短的，并且可以更早地把床位空出来。

但是如果只考虑住院时间，那么部分很早入院但是住院时间很长的病人也许要等待非常长的时间才能入院。因此，我们再把每人的门诊时间考虑进来，将排列标准规定为门诊时间加上虚拟住院时间，这样就能把两个因素都包含了。

“动态时延因子 EDD 算法”的具体实现步骤如下：

- 1) 记录当天的就诊病人，若有外伤患者，在预计次日空余床位的允许范围内，优先安排到次日入院。其余病人加入明天排队队列。
- 2) 对当天排队病人按照门诊时间加上虚拟住院时间后的日期进行排序。
- 3) 根据当天空余床位，安排排序靠前的病人入院，直到病床安排满。
- 4) 转 1) 进行下一天的安排。

8.2 模型求解及结果分析

由“动态时延因子 EDD 算法”重新安排病床，可以计算出病人的平均满意度达到了 0.93。各类病人的具体满意度如下：

满意度 人数	0~0.6	0.6~0.8	0.8~1
第一满意度	82	77	371
第二满意度	0	0	530
总满意度	0	37	493

病人类型	外伤	白内障	白内障（双）	青光眼	视网膜疾病
病人平均满意度	1	0.92	0.94	0.92	0.91

在 2008-7-25~2008-9-11 的 49 天内，医院一共接待入院了 530 中的 512 人，医院的利益指数 H 为 0.97。因此该算法下的病床安排策略的综合评价指数为：

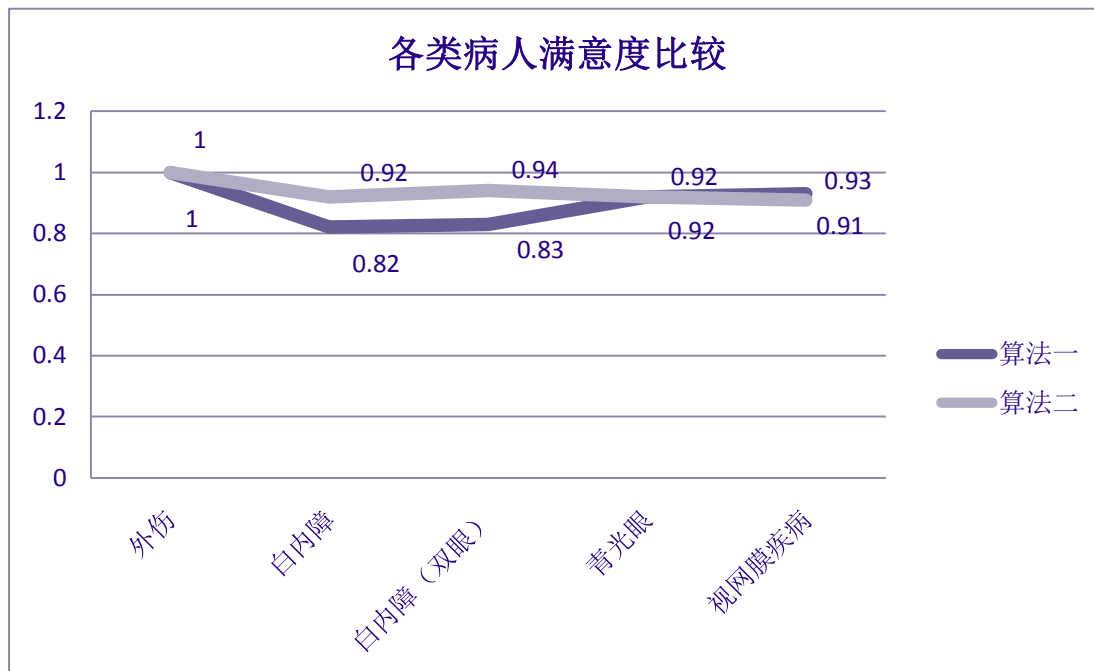
$$W = 0.4 \times H + 0.6 \times \frac{\sum_{i=1}^N S(i)}{N} = 0.95$$

根据规则二可以判定该策略合理，且比算法一的策略更优。

8.3 算法比较

将两种算法的结果进行比较发现，各项评价指标都有一定幅度的提高，都证明了算法二对模型有更好的优化效果。

对比各类病人的满意度还可以发现，一直白内障病人由于手术时间的限制，而使入院等待时间很难缩短，满意度提升幅度始终不大。但是用算法二就可以很好地安排白内障病人的入院时间，单双眼白内障病人的平均满意度都提高了至少 12%，达到 0.92 和 0.94：



再从病人的住院时间分析，由于每天入院病人的住院时间都是当天排队病人中最短的，根据贪婪算法思想，这样安排的病床策略必然也是病人逗留时间最短，病床有效利用率最高的。

9. 参考文献

- [1] 北京同仁医院眼科屈光中心，眼科手术费用以及注意事项，
<http://ks.120999.cn/treyeye/2008/>，2009 年 9 月 12 日
- [2] 王小虹，《我院病床预测和分配方案》，《临床医学》，2008 年 8 月第 21 卷第 8 期，1456 页。
- [3] 苏强，朱岩等，《改进 EDD 策略在门诊排队管理中的应用》，《清华大学学报(自然科学版)》，2007 年第 47 卷第 11 期，2081-2084 页。
- [4] 姜启源，谢金星，叶俊等，《数学模型》，北京：高等教育出版社，2003 年