

2020年湖南省研究生数学建模竞赛

竞赛承诺书

我们仔细阅读了湖南省研究生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权湖南省研究生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号是（从组委会提供的试题中选择一项填写）：**A**

我们的参赛报名号为（如果组委会设置报名号的话）：**202018001009**

所属学校（请填写完整的全名）：**国防科技大学**

参赛队员（打印并签名）：
1. **文一龙**
2. **林思萌**
3. **张杰**

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）：

日期：**2020**年**11**月**30**日

评阅编号（由组委会评阅前进行编号）：

评阅编号：
(由组委会填写)

2020 年湖南省高校第五届研究生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

评阅记录：

评 阅 人						
备 注						

(请勿改动此页内容和格式。此编号专用页仅供评阅使用。)

2020 年湖南省高校第五届研究生数学建模竞赛

题 目： 新冠肺炎疫情防控策略优化

摘 要：

2020 年的新冠肺炎疫情造成了全球多人死亡，同时也给各个国家带来了巨大的经济损失。虽然各个国家积极地采取了不同的防疫策略和措施，但取得的防疫效果却有好有坏。构建数学模型分析不同防疫措施对疫情传播和国家经济的影响，不仅有助于指导当前更好的开展防疫工作，还有助于提高国家对大规模传染病的“免疫能力”。针对题目所提问题，我们提出了以下解决方案。

针对问题一构建数学模型描述不同防疫管控措施对疫情传播的影响，采用基于 SEIR 模型改良的 SEIRD 模型将人群分为：自由易感者 (S_f)、收治易感者 (S_q)、潜伏者 (E) 等七个类别，通过构建微分方程描述各类人群之间的转化关系，数值模拟各类人群的演化过程。结果表明：SEIRD 模型用于疫情发展预测是可行的，“应收尽收、应治尽治”可以在早期遏制疫情的迅速发展，戴口罩等个人防护措施和严格的社交距离可以延缓疫情的大范围迅速传播，在确保疫情已经处于零星发展阶段才可以在做好疫情常态化防控的基础上适当开启经济，从而防止疫情反弹。

针对问题二构建数学模型分析疫情对国家经济的影响，采用灰色预测模型 GM (1, 1) 对中、美、印、澳四国经济进行了分析比较。结果表明：疫情对国家经济的冲击与疫情在当国的发展态势呈正相关关系，它不仅关乎一个国家的命脉，更关乎国民的切身利益。因此，政府和国民应该积极地面对疫情，采取必要的防控措施才能有助于国家经济的稳定和复苏。

针对问题三，通过建立层次分析模型，将疫情防控措施与各国基本国情对疫情遏制与经济的影响进行量化，并提出包括加权的疫情和经济在内的综合评价指标体系，分析疫情各项防控措施对总体指标的影响正负及其权重，基于此分析提出适合中国的策略是强化个人防护、有条件开放边境，疫情将继续被遏制，2021 年全年 GDP 增长 8.1%。适合印度的防策略是第一阶段全面封锁，疫情将在第二季度得到遏制，在第二阶段开始有条件的封锁，全年 GDP 增长为 5.5%。适合美国的策略是有条件的封锁与个人防护结合，疫情将在第一季度得到遏制，全年 GDP 将增长 4.2%。适合澳大利亚的策略是开放边境、部分隔离，疫情将在第一季度得到遏制，全年 GDP 增长 3.9%。

关键词：新冠肺炎疫情；SEIRD 模型；灰色预测模型；层次分析法。

1 问题重述

新冠肺炎疫情在全球蔓延以来，各个国家采取了不同的防疫策略和措施，取得的效果也不同。美国、印度、巴西等几个国家近几个月一直处在高峰期；欧洲国家之前病例有所下降，但近期又出现了反弹，而且创出了新高；相对而言，东亚国家比较成功地控制住了疫情，中国近几个月本土病例很少，只有零星发生的一些，韩国的病例则在较低数量上震荡。新冠肺炎疫情也给经济带来巨大的影响，在新冠肺炎疫情冲击下，2020年3月，美股在经历“黑色星期一”后，两周时间内4次触及熔断，而在美股多次熔断的同时，韩国、尼泊尔、墨西哥等十余个国家股市发生熔断。根据英国国家统计局12日公布的数据显示，在经历了第二季度创纪录萎缩之后，英国2020年第三季度国内生产总值环比增长15.5%，但同比下滑9.6%，仍未回到疫情暴发前的水平。专家认为，由于第一季度实施全国性防疫封锁措施之后放松了管制，第三季度经济出现增长。但随着第二轮全国性封锁的开始，英国经济很可能在今年年底再次萎缩。即将到来的冬季被认为可能会导致更强一波的疫情，我们希望总结过去，为下一阶段的抗疫和经济的发展提供更有效的策略和措施。

问题1：请你们团队收集几个典型国家新冠疫情及防疫管控措施的相关数据，建立数学模型，描述不同防疫管控措施对疫情传播的影响。

问题2：在第1问基础上，请进一步收集这几个国家经济方面数据，建立数学模型，分析比较疫情对这几个国家经济发展的影响。

问题3：请结合问题1和问题2的研究结果，通过建立综合评价体系，并收集必要的的数据，提出你们认为对不同国家更合理有效的防控策略优化方案，并预测在此防控方案下的各国2021年疫情及经济变化趋势。

2 问题的分析

2.1 问题1的分析

建立数学模型，描述不同国家的防疫管控措施对疫情传播影响的关键在于如何对防疫措施的影响进行定性和定量分析。本文将采用改进的SEIRD模型数值模拟新冠病毒的传播发展趋势，将不同的防疫措施与模型参数相关联，通过调节模型参数来反映不同防疫措施对疫情传播的影响。

2.2 问题2的分析

建立数学模型，分析疫情对国家经济发展的影响的问题，可以先将国家经济分解成若干个子部分，单独研究疫情对特定部分的影响，接着再将疫情对各子部分的影响整合在一起研究疫情对整个国家经济的影响。

2.3 问题3的分析

对于第三问，需要建立综合评价指标。考虑通过建立层次分析模型，将疫情防控措施与各国基本国情对疫情遏制与经济的影响进行量化，并提出包括疫情和经济在内的综合评价指标体系，分析疫情各项防控措施对总体指标的影响正负及其权重，基于此分析提出适合各国的防疫策略，并预测在基础上的疫情遏制和经济发展情况。

3 模型假设

- (1) 忽略带有病毒感染者潜伏者在医学观察期内始终未有明显症状的情况；
- (2) 自由易感者和自由感染者的收治效率假设为常数；
- (3) 将国家视为封闭系统，不考虑跨境人员的影响；

(4) 假设病毒不发生显著变异。

4 符号说明

表 1 符号说明

符号	含义
S_f	自由易感者
S_q	收治易感者
E	潜伏者
I_f	自由感染者
I_q	收治感染者
R	康复者
D	死亡者
λ	发病周期
ρ	有效接触率
β	传染率
c	接触率
ξ	自由易感者隔离速率
η	收治易感者患病率
α_1	自由感染者未得到治疗的情况下的治愈率
γ	为自由感染者收治率
ε_1	自由感染者未接受治疗情况下死亡率
α_2	收治感染者在得到治疗的情况下的治愈率
ε_2	收治感染者在接受治疗情况下死亡率

5 模型的建立与求解

5.1 问题一

5.1.1 SEIRD 模型

当前针对传染病传播模型主要有 SIR^[1] (Susceptible, Infectious, Recovered)、SEIR^[2] (Susceptible, Exposed, Infectious, Recovered) 和 SIS^[3] (Susceptible, Infectious, Susceptible) 模型等等, 其共同点在于将人群分类进行区别对待, 进而构建不同人群间的变化方程; 不同点在于参数的选取和对某个人群进行“特殊性”考虑。结合本次新冠疫情实际发展情况的考量, 本文选用改进的 SEIRD^[4] (susceptible, exposed, infectious, recovered, dead) 模型为作为疫情传播模型来分析和预测疫情发展趋势。

SEIRD 模型将人群分为 7 类: 自由易感者 (S_f) 指缺乏免疫能力, 与感染者接触后容易受到感染的未得病自由人群; 收治易感者 (S_q) 指缺乏免疫能力, 与

感染者接触后容易受到感染的未得病隔离观察人群；潜伏者（E）指接触过感染者，但暂无能力传染给其他人的人群；自由感染者（ I_f ）指染上新冠病毒的但并未收治治疗的人群；收治感染者（ I_q ）指染上新冠病毒的并已收治治疗的人群；康复者（R）指病愈并具有免疫力的人群；死亡者（D）指病愈死亡的人群。

七类人群的转化关系如图 1 所示。

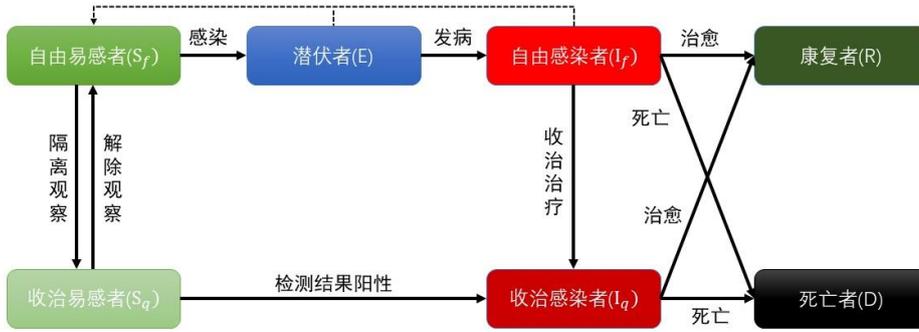


图 1 SEIRD 模型示意图

根据上述 SEIRD 模型图可得到各人群人数变化微分方程如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_f}{dt} = \lambda S_q - (E + I_f)\rho\beta c \frac{1}{S_f} - \xi S_f \\ \frac{dS_q}{dt} = -\lambda S_q + \xi S_f - \eta S_q \\ \frac{dE}{dt} = (E + I_f)\rho\beta c \frac{1}{S_f} - E\lambda \\ \frac{dI_f}{dt} = E\lambda - \alpha_1 I_f - \gamma I_f - \varepsilon_1 I_f \\ \frac{dI_q}{dt} = \gamma I_f + \eta S_q - \alpha_2 I_q - \varepsilon_2 I_q \\ \frac{dR}{dt} = \alpha_1 I_f + \alpha_2 I_q \\ \frac{dD}{dt} = \varepsilon_1 I_f + \varepsilon_2 I_q \end{array} \right.$$

其中， λ 为发病周期， ρ 为有效接触率， β 为传染率， c 为接触率， ξ 为自由易感者隔离速率， η 为收治易感者患病率， α_1 自由感染者未得到治疗的情况下的治愈率， γ 为自由感染者收治率， ε_1 为自由感染者未接受治疗情况下死亡率， α_2 收治感染者在得到治疗的情况下的治愈率， ε_2 为收治感染者在接受治疗情况下死亡率。

SEIRD 模型对参数初值高度敏感，并且与传染病在传播期间的社会防控措施密切相关，为了得到参数的初值与社会疫情防控措施的定量关系，本文首先对各国应对本次 COVID-19 疫情防控措施进行调查梳理。

5.1.2 典型国家疫情防控措施

本次疫情大流行以来，全世界各国都遭受了不同程度的疫情冲击，由于各国基本国情、治国理念的不同，不同地区的很多国家也采取了各自独特的防疫措施，甚至对于同一国家，在疫情流行的不同阶段，采取的措施也不尽相同。为了保证本文对于全球各国应对疫情措施的如实、全面反映，本文将选取中国、印度、美国、澳大利亚四个国家作为研究对象，以此分析不同防控措施下疫情传播规律，即 SEIRD 模型的各项参数取值情况，为政策评价和制定提供一定的借鉴意义。

5.1.2.1 中国应对疫情措施

根据国务院新闻办公室 2020 年 6 月 7 日发布的《抗击新冠肺炎疫情的中国行动》白皮书，中国的抗疫历程可以分为 5 个阶段。

第一阶段为 2019 年 12 月 27 日至 2020 年 1 月 19 日，这一阶段采取的主要疫情防控措施是报告疫情、开展病原鉴定、发布诊疗方案、向民众及全球各国通报疫情信息、加强口岸车站等地体温检测、建议减少人群聚集、强制民众出行佩戴口罩等。第二阶段是 1 月 20 日至 2 月 20 日，这一阶段新增确诊病例迅速增加，采取的主要措施包括武汉“封城”、湖北“封省”，即实施严格封闭的交通管控、全国医护力量对口支援、严格落实“早发现、早报告、早隔离、早治疗”措施，强调抓好“外防输入、内防扩散”。第三阶段是 2 月 21 日至 3 月 17 日，这一阶段本土新增病例下降至个位数，采取的主要疫情防控措施是全面加强出入境卫生检疫、落实分区级差异化防控策略、逐步取消交通限制、有序推动复工复产。第四阶段是 3 月 18 日至 4 月 28 日，这一阶段主要防疫措施均是面向防止境外输入。第五阶段是 4 月 29 日之后，全国疫情防控进入常态化，采取的主要防疫措施是抓好重点地区、重点群体疫情防控工作、有针对性的抓好输入性风险防控工作。

另外据公开信息，2019 年湖北医疗卫生机构床位数为 40.33 万张，湖北省每百万人口病床数为 40300（疫情期间湖北省人口数取 10000000）张^[5]。

5.1.2.2 印度应对疫情措施

根据网络媒体公开报道^[6]，印度采取的主要疫情防控措施包括加强国际交通管制，防止新型冠状病毒境外输入、国内管控逐步收紧，防止疫情出现社区传播、呼吁民众在非必要情况下，尽量减少去医院做常规检查。然而印度的全国封锁效果并不理想，企业的停工让大量在外务工人员集中返乡^[7]，反而加速了疫情的传播。



图 2 疫情下印度民工返乡

另外，由于印度大量的贫民窟存在，本身卫生条件较差，人员密集，基层执行力、控制力较弱，很多疫情应对措施在落实中大打折扣。而在疫情流行以来，印度政府并未就落实中新出现的情况作出政策上的加强或者调整，因此印度的防疫措施在全阶段并无明显区别。

另据公开信息，印度每百万人口病床数为 1160（截止 2020 年 6 月）张^[8]。

5.1.2.3 美国应对疫情措施

根据媒体公开报道和美国疾控中心（Centers for Disease Control and Prevention, CDC）网站信息，美国抗疫过程可以较为明显的分为三个阶段，即从 1 月 20 日报告首例确诊病例后的两个月时间为第一阶段，在这一阶段美国政府应对疫情的措施包括中断与别国的航空，发布保持社交距离指令，关闭部分企业、学校等。但是对于大量的家庭聚会没有禁止，对是否佩戴口罩没有做出要求，甚至建议没有症状的人员不要佩戴口罩。另外，由于部分美国民众对新冠病毒的

认识不够深入，存在一定数量的人群对于 COVID-19 的大范围传播持怀疑态度，因此社交距离这一规定在落实中也往往不能严格落实，仍然存在大量的人员接触。美国抗疫的第二阶段可以确定为 4 月 16 日至 5 月 11 日。由于前段时间的抗疫措施效果极其有限，美国新增病例大量增加，因此在 4 月 16 日之后美国政府进一步收紧了疫情应对措施，大量州宣布进入紧急状态，发布居家隔离令，超市、酒吧、影院等暂停营业，并且开始建议民众佩戴口罩。第三阶段为 5 月 12 日之后，基于上一阶段的有力措施，美国疫情遏制取得明显效果，新增病例由高峰的超过两万例减少至四千左右，美国政府认为疫情高峰已经过去，开始安排复工复产和复学工作，加之民众警惕意识下降，人员流动再次加大，个人防护措施也有所减弱。

另外据公开信息，2019 年美国每百万人口病床数为 2800 张^[9]。

5.1.2.4 澳大利亚应对疫情措施

澳大利亚国土面积大，人口数量少，人员密度比较少。面临疫情，澳大利亚政府采取了一系列措施应对，这包括发布社交距离规定并强制执行、发布旅行禁令、开发疫情跟踪应用程序、关闭边境等。在 3 月 24 日，澳大利亚累计确诊病例数超过两千后，澳大利亚升级了疫情应对措施，包括成立国家协调委员会用以调度人员物资、暂停非紧急手术以节约医疗资源应对疫情。

另外据公开信息，2019 年美国每百万人口病床数为 3800 张^[10]。

5.1.3 参数确定与模型求解

在对各国疫情应对措施调查分析的基础上，本文将根据疫情措施与 SEIRD 模型参数之间的关系对各国、各阶段确定模型参数，并对模型进行求解。

在本节中用到的各国疫情数据信息来源于世界卫生组织 (World Health Organization, WHO) 官网^[11]。模型各参数取值的基准参考文献^[4]。

5.1.3.1 对中国疫情的建模分析

由 5.1.2.1 节中分析可知，中国应对疫情的二、三、四阶段可以整合，因此整体可以分为三个阶段，在第一阶段中，各项措施不是强制执行，各地没有完全封锁，人员流动性仍然较大，故接触率 c 的值较大，同时由于对于病毒与肺炎认识有限，此时民众个人防护意识较差，有效接触率 ρ 和传染率 β 较大，治愈率 α_2 较小。由于此时医疗资源有限，感染者收治率 γ 的值较小。进入第二阶段，湖北、武汉完全封锁，全国各地人员流动性得到大大控制，并且由于民众防范意识的增强，接触率、有效接触率、传染率均减小。由于全国的对口支援，湖北省的医疗力量大大增强，感染入院率提高；随着对肺炎病情的了解深入，患者的治愈率提高、接受治疗的患者死亡率降低。在“应收尽收、应治尽治”政策的指导下，隔离的速度大大提高。进入第三阶段，新增病例数显著减少，进入疫情常态化管控，本地疫情暂时消失，仅存在零星境外输入和本地偶发散发病例。基于上述分析，参考文献^[4]，可以得到在三个阶段的模型参数。

表 2 中国 SEIRD 模型参数
(a) 第一阶段

参数	S_f	S_q	E	I_f	I_q	R
取值	14 亿	3122	5122	3577	786	31
参数	λ	ρ	β	c	ξ	η
取值	1/14	1	2.05×10^{-9}	2	1×10^{-6}	0.023
参数	α_1	γ	ε_1	α_2	ε_2	D
取值	0.727	0.33	0.132	0.872	0.068	10

(b) 第二阶段

参数	ρ	β	c	ξ	η
取值	0.8	1×10^{-9}	0.5	1×10^{-4}	0.015
参数	α_1	γ	ε_1	α_2	ε_2
取值	0.727	0.9	0.132	0.953	0.047

(c) 第三阶段

参数	ρ	β	c	ξ	η
取值	0.1	1×10^{-12}	0.03	1×10^{-2}	0.003
参数	α_1	γ	ε_1	α_2	ε_2
取值	0.727	1	0.932	0.014	0.003

该模型选取的数据为自1月14日起至3月29日,中国本土累计确诊病例和累计死亡病例。SEIRD模型参数以及初值如表2所示,利用matlab进行编程,得到了由SEIRD预测的中国新冠肺炎疫情累计确诊病例数与累计死亡人数,将结果与实际数据对比,如图3和图4所示。

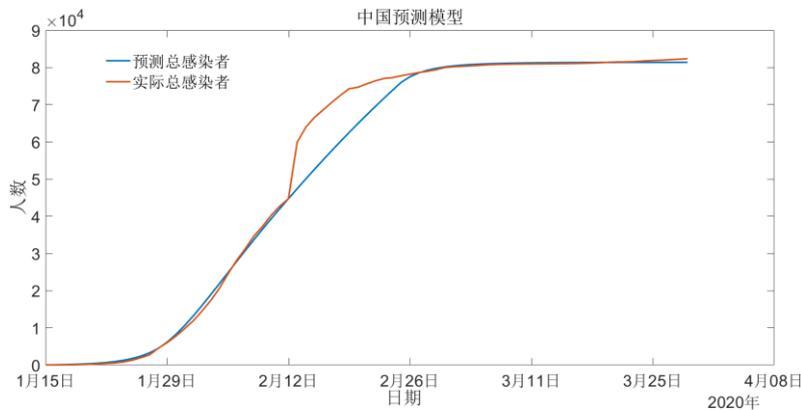


图3 中国累计确诊数预测和实际发展趋势图

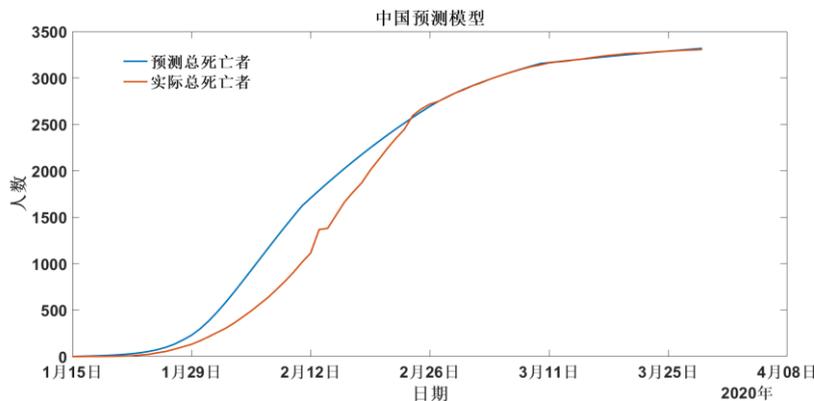


图4 中国累计死亡预测和实际发展趋势图

从图3和图4可知模型预测值与实际值一致性较好,比较准确地预测出了我国新冠肺炎总确诊病例为81380,与实际值82340误差仅1.18%。预测的累计死亡人数为3318,实际累计死亡人数3306,误差仅0.36%。图中还可以看出,在2月12日及之后一段时间,累计确诊病例的误差比较大,这是因为我国在2月12日改变了新增确诊病例的统计方式,将临床诊断病例计入新增病例中,导致实际总感染数大幅增加高于理论模型预测结果;累计死亡数在前期与实际数值偏低,这是因为在疫情前期,由于医疗资源受限,存在一定数量的患者不能及时就医,这部分患者中的死亡病例并未能纳入到数据统计中。

5.1.3.2 对印度疫情的建模分析

与 5.1.3.1 节分析相同,基于 5.1.2.2 节中对于印度应对疫情措施的调查分析,可以得到印度 SEIRD 模型的初始条件和模型参数。

表 3 印度 SEIRD 模型参数

参数	S_f	S_q	E	I_f	I_q	R
取值	13.3 亿	2800	4500	3200	658	25
参数	λ	ρ	β	c	ξ	η
取值	1/14	1	2.05×10^{-12}	5	1×10^{-9}	0.082
参数	α_1	γ	ε_1	α_2	ε_2	D
取值	0.727	0.23	0.213	0.92	0.08	10

该模型选取的数据为自 1 月 30 日起至 11 月 28 日,印度全国累计确诊病例和累计死亡病例。SEIRD 模型参数以及初值如表 3 所示,利用 matlab 进行编程,得到了由 SEIRD 预测的印度新冠肺炎疫情累计确诊病例数与累计死亡人数,将结果与实际数据对比,如图 5 和图 6 所示。

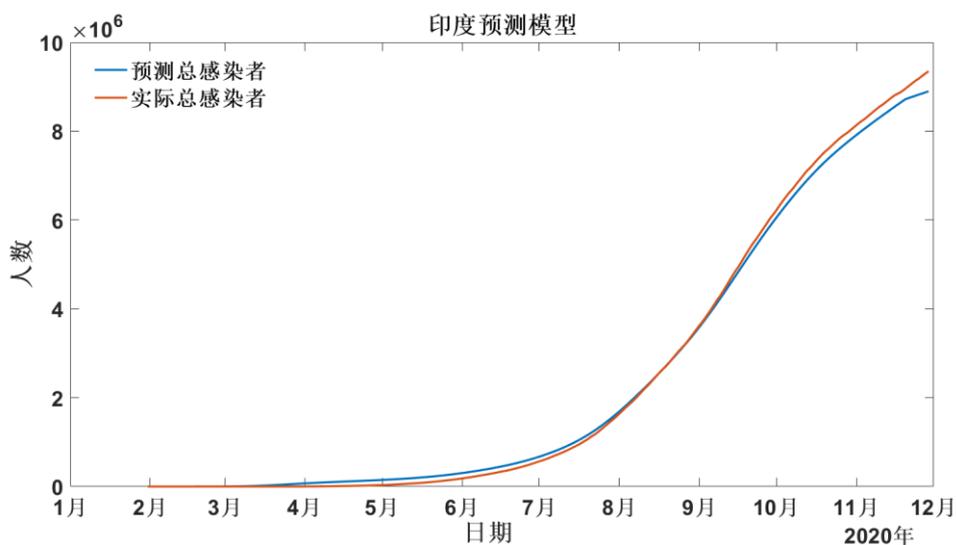


图 5 印度累计确诊数预测和实际发展趋势图

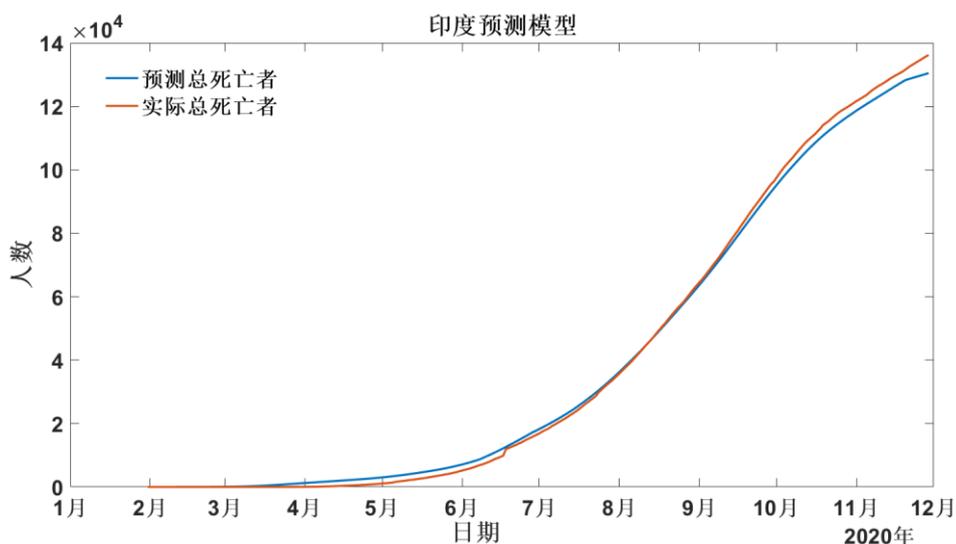


图 6 印度累计死亡预测和实际发展趋势图

从图中可以看出,印度的疫情形势没有明显转折点,这与本国抗疫措施的失效密切相关。并且在 11 月 28 日时,印度的实际增长病例比模型预测的值更大,这说明印度的防疫工作还存在模型中没有分析到的问题,模型参数还可以进一步

改进。

5.1.3.3 对美国疫情的建模分析

与 5.1.3.1 节分析相同, 基于 5.1.2.3 节中对于美国应对疫情措施的调查分析, 可以得到美国在三个阶段中 SEIRD 模型的初始条件和模型参数。

表 4 美国 SEIRD 模型参数

(a) 第一阶段						
参数	S_f	S_q	E	I_f	I_q	R
取值	3.3 亿	687	653	364	90	35
参数	λ	ρ	β	c	ξ	η
取值	1/14	1	2.05×10^{-9}	2	1×10^{-6}	0.023
参数	α_1	γ	ε_1	α_2	ε_2	D
取值	0.727	0.33	0.132	0.872	0.068	5

(b) 第二阶段					
参数	ρ	β	c	ξ	η
取值	0.6	1×10^{-9}	1	1×10^{-4}	0.005
参数	α_1	γ	ε_1	α_2	ε_2
取值	0.827	0.6	0.132	0.973	0.027

(c) 第三阶段					
参数	ρ	β	c	ξ	η
取值	0.95	1×10^{-10}	2	1×10^{-2}	0.32
参数	α_1	γ	ε_1	α_2	ε_2
取值	0.827	0.4	0.302	0.684	0.073

该模型选取的数据为自 1 月 31 日起至 8 月 9 日, 美国全国累计确诊病例和累计死亡病例。SEIRD 模型参数以及初值如表 4 所示, 利用 matlab 进行编程, 得到了由 SEIRD 预测的美国新冠肺炎疫情累计确诊病例数与累计死亡人数, 将结果与实际数据对比, 如图 7 和图 8 所示。

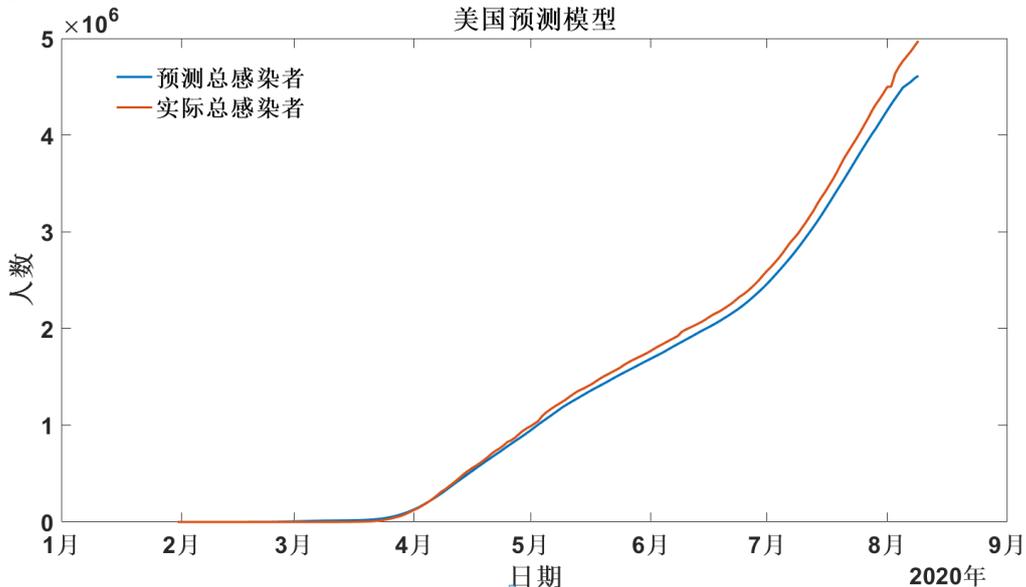


图 7 美国累计确诊数预测和实际发展趋势图

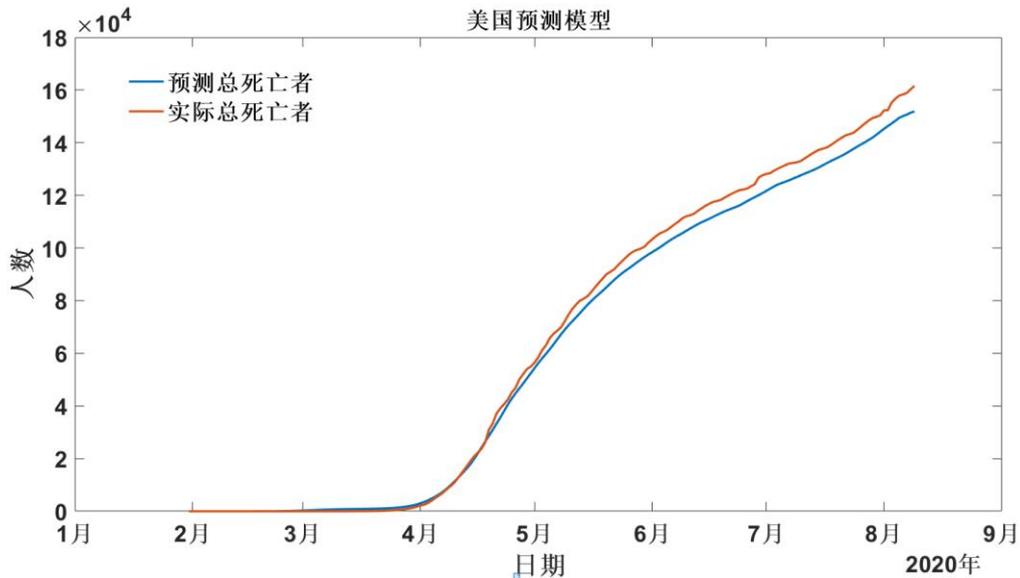


图8 美国累计死亡预测和实际发展趋势图

从图中可以看出，在第二阶段疫情措施较为严格的情况下，美国疫情有所好转，但是随着复工复产的进行，在第三阶段，人员流动的增大时疫情迅速反弹，在 11 月份以来更是达到新的高峰，可见在疫情尚未得到彻底控制之前对企业的盲目开放将会使得疫情形势急转直下。

5.1.3.4 对澳大利亚疫情的建模分析

与 5.1.3.1 节分析相同，基于 5.1.2.4 节中对于澳大利亚应对疫情措施的调查分析，可以得到澳大利亚在两个阶段中 SEIRD 模型的初始条件和模型参数。

表 5 澳大利亚 SEIRD 模型参数

(a) 第一阶段						
参数	S_f	S_q	E	I_f	I_q	R
取值	0.25 亿	74	53	34	8	8
参数	λ	ρ	β	c	ξ	η
取值	1/14	1	2.05×10^{-9}	1.8	1×10^{-6}	0.025
参数	α_1	γ	ϵ_1	α_2	ϵ_2	D
取值	0.727	0.33	0.132	0.902	0.088	5
(b) 第二阶段						
参数	ρ	β	c	ξ	η	
取值	0.2	1×10^{-9}	0.04	1×10^{-4}	0.015	
参数	α_1	γ	ϵ_1	α_2	ϵ_2	
取值	0.827	1	0.132	0.973	0.027	

该模型选取的数据为自 1 月 31 日起至 11 月 28 日，澳大利亚全国累计确诊病例和累计死亡病例。SEIRD 模型参数以及初值如表 5 所示，利用 matlab 进行编程，得到了由 SEIRD 预测的澳大利亚新冠肺炎疫情累计确诊病例数与累计死亡人数，将结果与实际数据对比，如图 9 和图 10 所示。

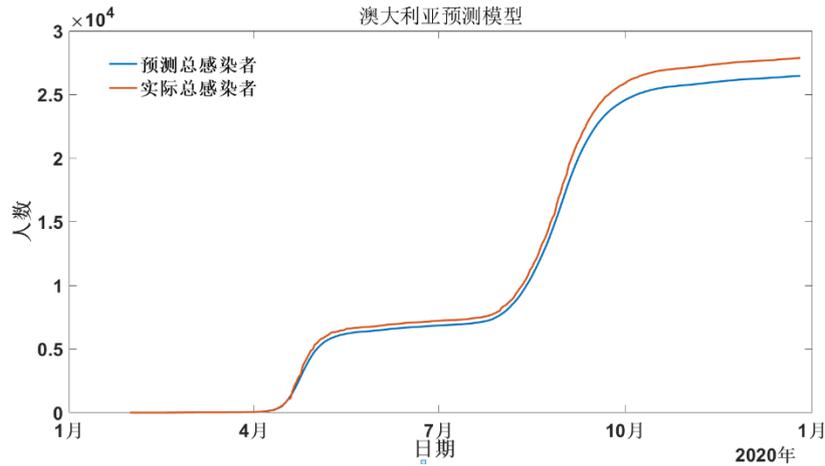


图9 澳大利亚累计确诊预测和实际发展趋势图

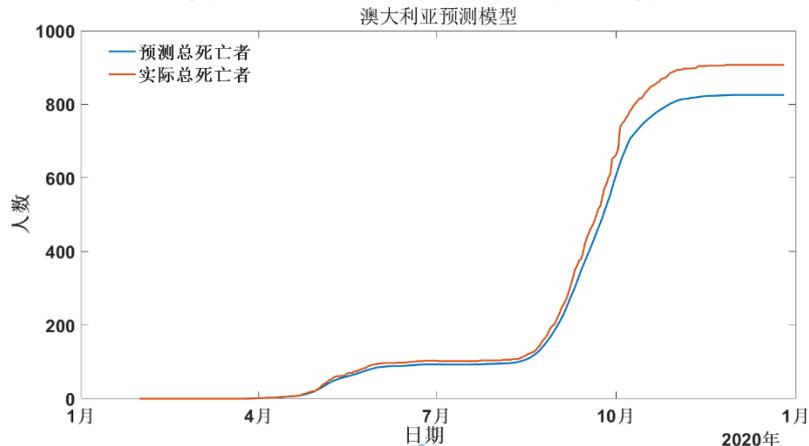


图9 澳大利亚总死亡预测和实际发展趋势图

分析结果可知，澳大利亚在第一阶段和第二阶段的疫情防控措施起到了明显的效果。但是从图中可知，在进入八月份以后，澳大利亚疫情出现大的反弹，确诊人数和死亡病例数显著增加，这可能与澳大利亚进入冬季有关，在我们的模型中并未考虑到季节（气温）这一因素，这可能是该模型对于澳大利亚的预测中出现了较大误差的原因所在，限于篇幅和时长原因，本文不在此赘述。

5.1.4 小结

结合 5.1.2 节调查分析和 5.1.3 节模型求解结果分析可知，本文将 SEIRD 模型用于疫情发展预测是可行的，对于不同的疫情防控措施，将得到不同的模型参数，不同的模型参数对于疫情的发展有很大影响。中国的抗疫全程能够将感染人数和患病死亡人数降至最低，澳大利亚的前期抗疫措施也能有力应对疫情传播。印度的抗疫努力效果十分微弱，主要原因在于其基础卫生条件较差，措施落实不力，其实质效果其实相当于所谓“自然群体免疫”。美国在第二阶段的抗疫是相对成功的，然而最终失败的结果则源于过早的估计疫情的高峰，在疫情尚未结束时盲目开启经济，导致前功尽弃。可以得出，“应收尽收、应治尽治”可以在早期遏制疫情的迅速发展，戴口罩等个人防护措施和严格的社交距离可以延缓疫情的大范围迅速传播。在确保疫情已经处于零星发展阶段才可以在做好疫情常态化防控的基础上适当开启经济，从而防止疫情反弹。

5.2 问题二

5.2.1 灰色预测模型 GM (1, 1)

为了便于阐述，现用我国 GDP 数据作为示例展示模型构建过程。我国 2014-2019GDP 数据如表 6 所示。

表 6 中国 2014 年-2019 年各季度 GDP 总值 (亿元)

年份	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
2014	138738.00	155201.00	163467.00	178732.80
2015	147961.80	166216.40	173595.30	189372.00
2016	158526.00	179927.00	189334.00	211281.00
2017	180385.30	200558.70	211595.50	234582.20
2018	198783.00	220178.00	231938.00	249491.00
2019	213433.00	237500.00	246865.00	278000.00

对于上述数据记为矩阵 $A = (a_{ij})_{6 \times 4}$, 计算每年的年平均值并记为:

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), x^{(0)}(4))$$

对 $x^{(0)}$ 作一次累和, 则

$$x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$$

$$x^{(1)}(i) = \sum_{k=1}^i x^{(0)}(k) \quad (i = 2, 3, 4)$$

记

$$x^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), x^{(1)}(3), x^{(1)}(4))$$

对 $x^{(1)}$ 进行加权, 令 $y^{(1)}(k) = \alpha x^{(1)}(k) + \beta x^{(1)}(k-1) \quad (k = 2, 3, 4)$, α 和 β 为确定参数并满足 $\alpha + \beta = 1$, 记: $y = (y^{(1)}(1), y^{(1)}(2), y^{(1)}(3), y^{(1)}(4))$

则 GM (1, 1) 的白化微分方程模型为:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$$

其中 a 是发展灰度, b 是内生控制灰度。由于 $x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) = x^{(0)}(k)$, 取 $x^{(0)}(k)$ 为灰导数, $y^{(1)}(k)$ 为背景值, 则上述白化微分方程相应的灰微分方程为:

$$x^{(0)}(k) = -ay^{(1)}(k) + b \quad (k = 2, 3, 4)$$

将灰微分方程改写成矩阵形式有:

$$Y = B(a, b)^T$$

其中,

$$Y = (x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), x^{(0)}(4))$$

$$B = \begin{bmatrix} -y^{(1)}(2) & -y^{(1)}(3) & -y^{(1)}(4) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

用最小二乘法求得参数的估计值为 $(\hat{a} \quad \hat{b})^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$, 则灰微分方程存在特解:

$$\hat{x}^{(1)}(t+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right) e^{-at} + \frac{b}{a}$$

则有:

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right) (e^{-ak} - e^{-a(k-1)})$$

由上式可以得到 2020 年的平均值为 \bar{x} , 则预测的 2020 年的总值为 $Y = 4\bar{x}$ 。根据历史数据, 可以统计计算 2020 年第 i 个季度的指标值占全年总值的比例为 ρ_i :

$$\rho_i = \frac{\sum_{j=1}^x a_{ij}}{\sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^x a_{kj}} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

则 2020 年每一季度的 GDP 预测值为 $V = Y\rho$ 。

5.2.2 模型求解

5.2.2.1 国民生产总值 GDP

表 7 美国 2014 年-2019 年各季度 GDP 总值（亿元）

年份	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
2014	260186.0737	263122.9188	266330.9332	267778.8127
2015	267680.2057	268434.5492	269755.883	270686.0757
2016	271580.1125	272534.957	274899.8815	276318.1789
2017	277296.0316	279897.613	282080.1146	284094.9843
2018	301145.778	304228.8902	306749.9425	308398.3229
2019	310781.3254	312615.4156	314097.8075	315903.959

表 8 印度 2014 年-2019 年各季度 GDP 总值（亿元）

年份	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
2014	30765.49	29648.02	30590.2	31908.09
2015	31983.80	30822.08	31801.57	33171.65
2016	33963.60	32729.97	33770.09	35224.98
2017	37161.97	35812.16	36950.23	38542.13
2018	41274.16	39774.98	41038.98	42807.04
2019	44320.22	42710.40	44067.69	45966.23

表 9 澳大利亚 2014 年-2019 年各季度 GDP 总值（亿元）

年份	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
2014	18789.64	19606.20	19543.58	20463.58
2015	19039.77	19840.86	19994.40	20826.10
2016	19385.07	20540.74	20612.17	22216.15
2017	20842.84	21785.60	21890.75	24419.40
2018	22409.97	23423.62	23536.67	26255.45
2019	21783.12	22768.41	22878.30	25520.98

根据灰色预测模型 GM(1, 1) 利用 matlab 编程计算得到各国 2020 年各季度 GDP 预测总值如表 10 所示。

表 10 2020 年各季度各国预测的 GDP 预测总值（亿元）

国家	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
中国	206469	250342	266383	289301
美国	346602	310824	300321	296753
印度	49521	45099	44696	44841
澳大利亚	20083	21476	21257	23911

2014 年-2020 年（2020 年为预测值）四个国家各季度 GDP 变化趋势如图 11-图 14 所示。

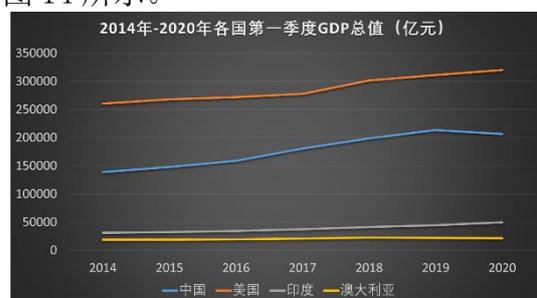


图 11 2014 年-2020 年各国第一季度 GDP 变化趋势图



图 12 2014 年-2020 年各国第二季度 GDP 变化趋势图



图 13 2014 年-2020 年各国第三季度 GDP 变化趋势图

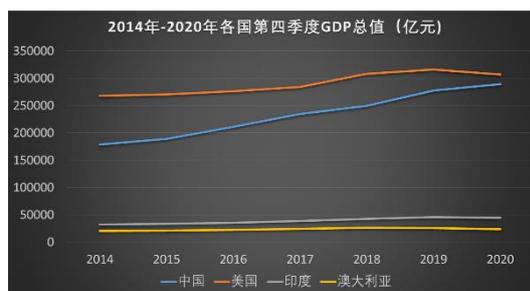


图 14 2014 年-2020 年各国第四季度 GDP 变化趋势图

从图 11 中可以看出 2020 年第一季度中国 GDP 出现了负增长，美国、印度、澳大利亚三个国家 GDP 同比增长速度放慢，这一变化趋势符合 2020 年第一季度中国经济率先受到疫情冲击，其他国家疫情相对较轻的实际情况。图 12 展现了四个国家 2014 年-2020 年第二季度 GDP 变化情况，可以看出由于中国各省市陆续开始复产复工，使得 GDP 保持了正增长，但同时也注意到由于疫情还未结束 GDP 同比增长速度放缓这一现象；从第二季度开始美国、印度、澳大利亚三个国家疫情逐渐加剧，商业活动受到一定限制，造成国内 GDP 增长速度遭受不同程度的降低。

5.2.2.2 失业率

表 11 中国 2014 年-2019 年各季度失业率 (%)

年份	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
2014	4.10	4.10	4.10	4.1
2015	4.10	4.04	4.04	4.05
2016	4.04	4.05	4.04	4.02
2017	3.97	3.95	3.95	3.90
2018	5.10	4.83	5.07	4.87
2019	5.20	5.03	5.23	5.13

表 12 美国 2014 年-2019 年各季度失业率 (%)

年份	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
2014	6.63	6.20	6.67	5.70
2015	5.57	5.40	5.17	5.00
2016	4.93	4.87	4.93	4.70
2017	4.67	4.37	4.30	4.10
2018	3.90	3.83	3.80	3.87
2019	3.63	3.63	3.83	3.76

表 13 印度 2014 年-2019 年各季度失业率 (%)

年份	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
2014	6.19	6.89	6.98	7.01
2015	6.30	6.95	7.10	7.16
2016	6.57	7.08	7.11	7.23
2017	6.64	7.11	7.26	7.35
2018	6.80	7.20	7.31	7.52
2019	6.93	7.43	7.48	7.63

表 14 澳大利亚 2014 年-2019 年各季度失业率 (%)

年份	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
2014	5.95	5.93	6.11	6.23
2015	6.24	6.07	6.14	5.93

2016	5.79	5.74	5.69	5.70
2017	5.79	5.70	5.52	5.47
2018	5.49	5.41	5.30	5.06
2019	5.03	5.17	5.25	5.19

根据灰色预测模型 GM (1, 1) 利用 matlab 编程计算得到 2014 年-2019 年四个国家各季度失业率 (%) 如表 15 所示。

表 15 四个国家 2014 年-2019 年各季度失业率 (%)

国家	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
中国	5.90	5.70	5.57	5.20
美国	3.83	13.03	8.83	8.72
印度	7.93	18.40	7.50	7.64
澳大利亚	5.21	5.58	7.31	7.19

2014 年-2020 年 (2020 年为预测值) 四个国家各季度失业率 (%) 变化趋势如图 15-图 18 所示。



图 15 2014 年-2020 年各国第一季度失业率 (%) 变化趋势图

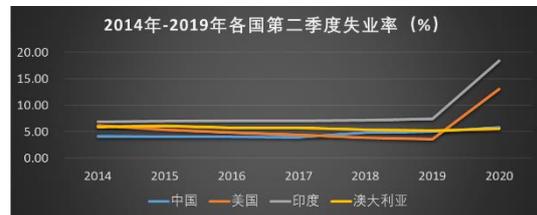


图 16 2014 年-2020 年各国第二季度失业率 (%) 变化趋势图



图 17 2014 年-2020 年各国第三季度失业率 (%) 变化趋势图



图 18 2014 年-2020 年各国第四季度失业率 (%) 变化趋势图

从图 15 可以看出由于 2020 年第一季度疫情在各个国家的发展程度不同, 中国第一季度失业率相比于美国、印度和澳大利亚三个国家增长速度较快; 2020 年第二季度中国政府实施各种惠民政策刺激经济拉动内需, 使得后三个季度失业率环比增长速率放缓, 而其他国家, 尤其是美国和印度在第二季度时国内疫情大爆发, 造成失业率激增。

综上所述, 疫情对国家经济的冲击与疫情在当国的发展态势呈正相关关系, 它不仅关乎一个国家的命脉, 更关乎国民的切身利益。因此, 政府和国民应该积极面对疫情, 采取必要的防控措施才能有助于国家经济的稳定和复苏。

5.3 问题三

5.3.1 模型建立

从题 1 和题 2 的分析可知, 疫情与经济在短时间内是互相矛盾的, 要迅速控制疫情则必须要求经济在当前作出一定牺牲, 而从长远来看, 疫情若得不到控制, 经济的发展将是疫情更加恶化, 从而使经济的发展受累, 最终疫情难以解决, 经济也将无法避免的衰退。因此, 找到适合各个国家的疫情防控策略, 对于平衡疫情与经济至关重要。本文提出一个综合评价指标 S

$$S = f(M, C) * g(M, C)$$

其中 M 表示一系列疫情防控措施, C 表示某个国家国情, $f(M, C)$ 表示疫情的遏制程度, 可以用每日新增病例的减少量等指标来表征, $g(M, C)$ 表示经济的发展程度, 可以由 GDP、失业率等指标来衡量。

要分析各疫情防控措施和不同国情对于 S 的影响, 主要思路是通过层次分析法建立各种措施和国情重要度评价指标和权重, 然后确定 f 或 g 的重要度, 再根据设计指标 S , 评价每个因素的重要性, 最后综合得到所有因素的影响程度比较结果。

层次分析法的 4 个基本步骤:

1. 建立层次结构模型。对实际问题进行建模, 将各个因素按照不同的属性自上而下地分解成若干层次。最上层为目标层, 一般只有一个因素, 也是最终的结果, 中间可以有一个或者几个层次, 一般称之为准则或指标层, 最下层一般为方案或对象层, 是实际进行定量的目标。

2. 构造成对比较矩阵。从层次结构模型的第二层到最下层, 对每一层中从属于上层的每个因素的同层的每个因素, 用成对两两比较法得出比较矩阵。

3. 计算权向量和进行一致性检验。对每一个比较阵, 通过计算和检验一致性和一致性比率指标, 来进行一致性校验。若校验通过, 则对特征向量进行归一化, 得到权向量; 若不通过, 则表面比较矩阵逻辑性有问题, 需重新构造。

4. 计算组合权向量并做组合一致性检验。计算最下层对目标的组合权向量, 并且同样需要进行一致性检验, 若通过, 则可按照组合权向量表示的结果来进行决策, 否则需要重新建模或者重新构造那些一致性比率相对较大的成对比较阵。

对于本问题而言, 其主要影响因素包括

$M = \{ \text{‘无所作为’}, \text{‘封锁’}, \text{‘有条件的封锁’}, \text{‘大面积隔离’}, \text{‘部分隔离’}, \text{‘个人防护’} \}$

以及

$C = \{ \text{‘人均病床数’}, \text{‘医疗水平’}, \text{‘国家基本卫生条件’}, \text{‘基层控制能力’}, \text{‘经济发展基本水平’}, \text{‘开放边境’} \}$

5.3.2 模型求解

对中国、印度、美国、澳大利亚分别用层次分析法求解影响疫情和经济的 M 指标, 可以得到在当前疫情和经济条件下对于各国而言, 所应采取的防疫措施并不相同。

对中国而言, ‘个人防护’和‘开放边境’所占的权重最大。因此对于中国而言, 应该继续做好国内防疫宣传, 保证民众做好个人防护, 在国家层面应注意不能完全封锁边境, 而应该有条件的开放。在这一组措施下中国 2021 年疫情将保持现状不变, 没有大范围的疫情爆发发生, 2021 全年 GDP 同比将增长 8.1%。

对印度而言, ‘完全封锁’、‘部分隔离’和‘基层控制能力’所占权重最大。因此在 2021 年, 印度应该首先通过提高自身的基层控制能力, 在防疫上实行国内‘完全封锁’和‘部分隔离’组合的策略, 先通过遏制疫情, 为经济发展创造条件。在这一策略下, 印度疫情将在第二季度时得到遏制, 如图 19 所示。而经济将在 2021 年前三季度继续萎缩, 第四季度恢复 3.3% 的正增长, 2021 全年经济增长 5.5%。

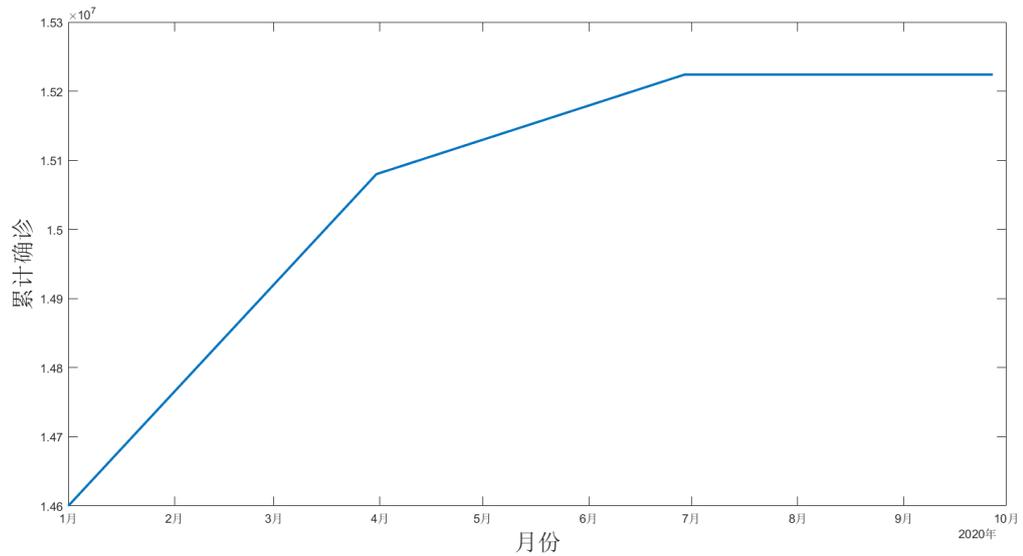


图 19 印度 2021 年疫情预测

对美国而言，‘完全封锁’和‘个人防护’所占权重最大，这意味着美国疫情遏制和经济发展难以实现平衡，当前急需快速控制疫情。在这一策略下，美国疫情将在第三季度得到初步控制，全年 GDP 实现同比 1.2% 的正增长。

对澳大利亚而言，‘有条件的封锁’、‘个人防护’和‘开放边境’在指标 S 下是最重要的因素，在这一防疫策略下，澳大利亚疫情能够在一季度得到遏制，同时在一季度能实现 2.4%、全年 3.9% 的同比 GDP 正增长。

参考文献

- [1] 喻孜, 张贵清, 刘庆珍, 吕忠全. 基于时变参数-SIR 模型的 COVID-19 疫情评估和预测[J]. 电子科技大学学报, 2020, 49(03): 357-361.
- [2] 林俊锋. 基于引入隐形传播者的 SEIR 模型的 COVID-19 疫情分析和预测[J]. 电子科技大学学报, 2020, 49(03): 375-382.
- [3] 李芳, 刘茂省. 具有媒体饱和效应影响的时滞 SIS 模型研究[J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(10): 215-221.
- [4] 曹盛力, 冯沛华, 时朋朋. 修正 SEIR 传染病动力学模型应用于湖北省 2019 冠状病毒病(COVID-19) 疫情预测和评估[J]. 浙江大学学报: 医学版, 2020, 49(2): 178-184.
- [5] 胡飒. 2011-2019 年湖北医疗卫生机构床位数结构分析及单位人口医疗卫生机构床位数统计. <https://www.huaon.com/channel/distdata/664073.html>. 2020. 11. 30
- [6] 李俊鹏 孟祥海. 解读 | 印度采取多重举措, 应对新冠疫情危机. <https://baijiahao.baidu.com/s?id=1664365293714337065&wfr=spider&for=pc>. 2020. 11. 30
- [7] 孟祥. 印度遭遇飓风和疫情双重打击, 劳工返乡潮场面壮观. <https://www.sohu.com/picture/397138604?scm=1002.220022.d2.0-0>. 2020. 11. 30
- [8] 张华在. 印度每百万有多少病床. <https://zhidao.baidu.com/question/2081600230765519308.html>. 2020. 11. 30
- [9] 李明博. 拉警报! 美国每千人平均病床数 比意大利还少. <http://www.pinlue.com/article/2020/03/2521/5010053683931.html>. 2020. 11. 30
- [10] 张华山. 抗疫一线, 澳洲医院的医护和病床够用么? 数据: 比意大利还差. https://www.sohu.com/a/383849569_756019. 2020. 11. 30
- [11] <https://www.who.int/>. 2020. 11. 30