

竞赛承诺书

我们仔细阅读了湖南省研究生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后，参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究和讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权湖南省研究生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号是（从组委会提供的试题中选择一项填写）：B

我们的参赛报名号为（如果组委会设置报名号的话）：202018001014

所属学校（请填写完整的全名）：国防科技大学

参赛队员（打印并签名）：1. 欧丽莎

2. 何旭

3. 李新博

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）：

日期：2020年11月26日

评阅编号（由组委会评阅前进行编号）：

评阅编号：
(由组委会填写)

2020 年湖南省高校第五届研究生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

评阅记录：

评 阅 人						
备 注						

(请勿改动此页内容和格式。此编号专用页仅供评阅使用。)

题 目： 定向越野比赛路线设计

摘 要：

定向越野是一种借助指北针、地形图或者其他导航工具在设定的范围内，通过途中的各种障碍，快速抵达目标点的运动。本题要求在满足①路线总长度均匀、②总难度均匀、③爬高量均匀（问题二和问题三）、④重复路段较少、⑤确定所有路径的两个必经打卡点和共同终点（难度系数低）、⑥相邻打卡点尽可能连续、⑦用时抵达同一检查点人数不超过 5、⑧单人平均完成比赛时间不小于两小时、⑨比赛总时长不超过 3 小时（第三问为 3.5 小时）等约束的前提下，对越野比赛路线进行规划，同时获取参赛选手的相关信息。

针对问题一：本题要求对 100 个平面坐标点进行路线规划，使得更多的参赛选手可以加入比赛。本文以最大化路径数量，最小化总长度、总打卡难度方差以及重复路段数量作为优化目标，构建多目标多路径优化模型，利用改进遗传算法、A*算法以及 CPLEX 求解，并采用两种策略进行优化，最终结果表明，

- ① 最优路径数量为 5 条；总参赛选手数量为 321 人；
- ② 各路线参赛选手数量分别为 64, 64, 65, 63, 65 人；
- ③ 总长度(单位：千米)分别为 6.807, 6.802, 6.546, 6.839 以及 6.691；
- ④ 总难度为 60, 60, 62, 61, 61；
- ⑤ 必经点序号为 11 和 12 号节点，终点为 84 号节点。

针对问题二：本题要求对 150 个三维坐标点进行路线规划，使得更多的参赛选手可以加入比赛。相较于第一问，本文新增了最小化总爬高量方差作为约束条件，将路径长度方式从二维空间修改为三维空间。本题建模方法与求解问题一一致，最终结果表明，

- ① 最优路径数量为 5 条；总参赛选手数量为 231 人；
- ② 各路线参赛选手数量分别为 44, 48, 44, 47, 48 人；
- ③ 总长度(单位：千米)分别为 7.639, 7.380, 7.634, 7.371 以及 7.343；
- ④ 总难度为 68, 67, 68, 68, 68；
- ⑤ 爬高量为 47, 47, 44, 45, 42；
- ⑥ 必经点序号为 75 和 112 号节点，终点为 134 号节点。

针对问题三：本题要求对 200 个平面坐标点进行路线规划，并对 120 名已知平均速度的参赛队伍进行分配，使得路线数量尽可能少，完成时间尽可能短。本题解题步骤如下：①利用问题二的算法求得问题三的基础解集；②按速度越快，则排序越靠前，所跑线路总长度越大的原则分配各选手数量，获取第一轮优化解；③在第一轮优化解的基础上，对所有选手进行随机分配，获取最终优化解。最终结果表明，

- ① 最小路径条数 3 条；必经节点序号为 183 和 195，终点为 168
- ② 各路线参赛选手数量分别为 40, 40, 40；
- ③ 总长度为 7.475, 7.570, 7.518；
- ④ 总难度为 104, 104, 105；
- ⑤ 爬高量为 63, 53, 65。

最后，对本文模型进行分析和评价。

关键词：改进遗传算法；多目标多路径优化；定向越野路线设计

一、背景与问题重述

定向越野是一种利用指北针和地形图按照一定规则在野外进行穿行,完成相应任务(打卡)并抵达终点,用时少者获胜。在定向越野中,比赛路线具有以下特征:① 所有比赛的起点和终点相同;② 一条比赛路径可安排一个或多个选手(若为多个选手,则需按照一定间隔出发);③ 不同路径首发参赛选手同时出发;④ 选手必须根据所选路径检查点顺序进行打卡。

据此,路径规划的设计规则如下:

规则 1: 不同路径的长度均匀;

规则 2: 不同路径的总打卡难度(打卡时间)均匀;

规则 3: 不同路径的爬高量均匀,即爬坡量;

规则 4: 避免包含较多的重复路段,即“尾随路段”^[1];

规则 5: 路径检查点数量大于等于 20 个,且包含 2 个所有路径的公共检查点;

规则 6: 相邻或相近检查点打卡顺序应当尽可能连续,且路线尽可能短;

规则 7: 同时抵达(时间间隔小于 1 分钟)同一检查点的队伍数小于等于 5;

本题要求,在已知参赛选手平均行进速度为 6km/h 的前提下,完成以下问题:

问题一: 已知起点和候选检查点的坐标及检查点难度(附件 1),在不考虑爬高量的情况下,对路径进行规划,规划要求包括① 参赛选手完成任务平均时间大于等于 2h;② 比赛总时长小于等于 3h;③ 赛道可容纳尽可能多的参赛选手。并给出总参赛选手数量、各路线参赛选手数量、检查点、总场数以及总难度。

问题二: 考虑任务点高程信息,增加爬高量均匀约束,其余要求与问题一相近。

问题三: 本题给出 120 名参赛选手的速度信息(附件 3),要求在① 每名参赛选手平均完成时间大于等于 2h;② 比赛总时长不超过小于等于 3.5h 的情况下,设计比赛路线,并给出各条路线参赛选手的数量、检查点、总长度、任务总时长以及爬高量。

二、问题假设与符号说明

2.1 问题假设

(1) 起点、终点以及不同检查点之间均存在直线路径,且参赛选手在比赛途中皆按照直线行进;

(2) 起点和终点不属于检查点,即一条路径加上起点和终点应当共 22 个点。

(3) 不考虑各种突发意外情况。

2.2 符号说明

序号	符号	说明
1	$R_i = \{r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in_i}\}$	为第 i 条路径(最短路径)的节点序列
2	r_{ij}	表示第 i 条路径中第 j 个节点的编号

3	n_i	表示第 i 条路径的节点个数
4	$n = \max_{0 < i < N}(n_i)$	表示所有路径节点数目的最大值
5	(x_{ij}, y_{ij})	第 i 条路径中第 j 个节点的编号的坐标
6	l_i	第 i 条路径的长度
7	$W_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in_i})$	各路径节点的难度
8	M	路径序列矩阵
9	M^i	路段对比矩阵 M^i
10	Q	在各路径中出现次数大于 5 的节点
11	$[q_1, \dots, q_c, \dots, q_C]$	通过检查节点 Q 的路径
12	C	经过 Q 节点的最大路径数 $5 < C < \min(N, 20)$
13	$v_0 = 6\text{km/h}$	参赛选手的平均行进速度
14	D	各路径抵达多路径交点时间从小到大排序的结果
15	$t = [t_1, t_2, \dots, t_N]$	各赛道总时长
16	$H_i = [h_1, h_2, \dots, h_{n_i-1}]$	路径 i 的爬高量
17	$T^* = [T_1^*, T_2^*, \dots, T_N^*]$	各路线选手间隔时间
18	$\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_g, \dots, \theta_{120}]$	按速度从大到小排序的参赛选手集
19	$v = [v_1, v_2, \dots, v_g, \dots, v_{120}]$	参赛选手集中参赛选手对应的速度

三、问题分析

3.1 探索性数据分析

本题要求根据附件 1 的数据信息设计满足规划要求的路径。查询相关资料可知^[2]，主要的路径形式分为闭合路线、半闭合路线、开放路线、交叉路线、星形路线 1 以及星形路线 2 共 6 种形式，如图 1 所示

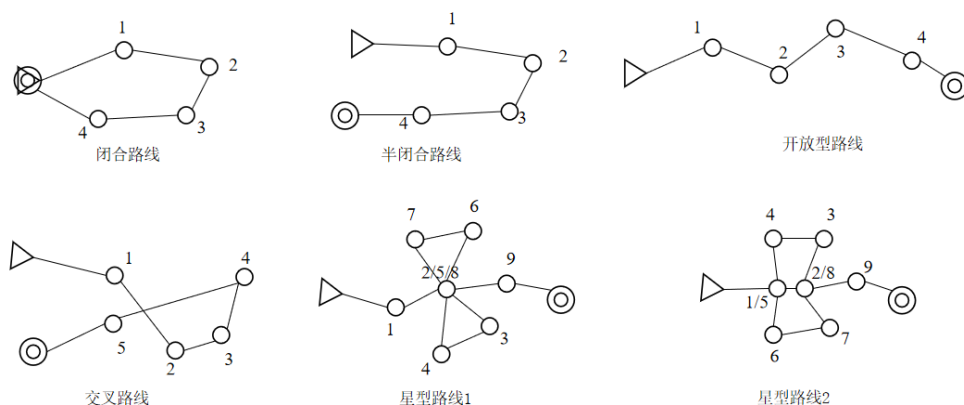
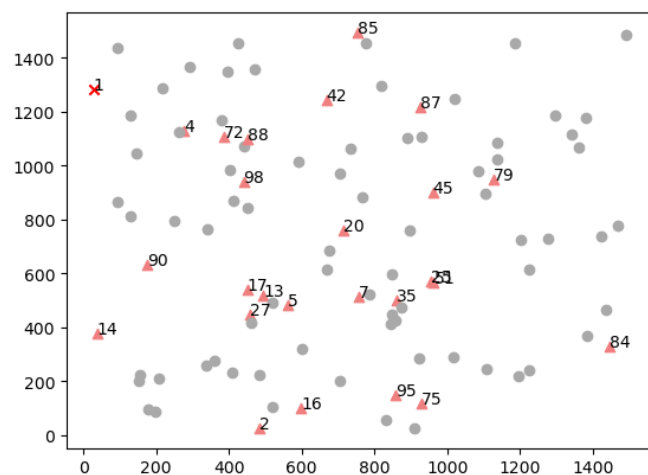
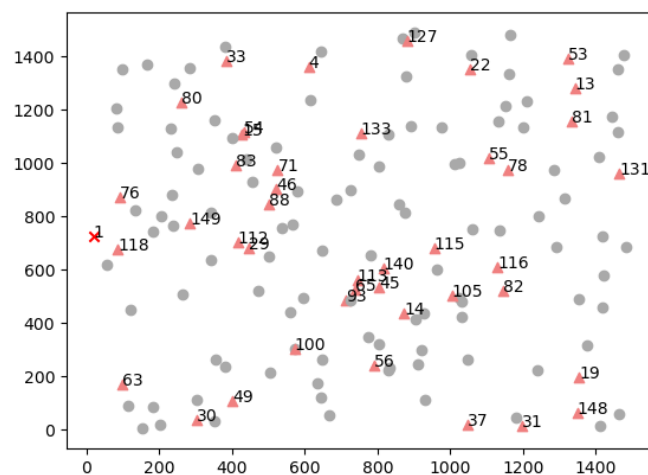


图 1 定向越野主要路线类型

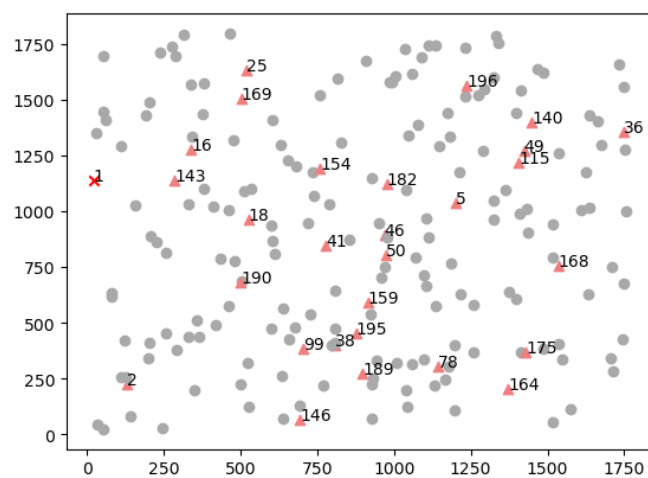
附件 1 中起点数据的任务难度为 1，符合终点选取要求，因此，本文将分为闭合路线（起点与终点重合）和非闭合路线两种情况考虑。



(a) 附件 1 数据点分布情况



(b) 附件 2 数据点分布情况



(c) 附件 3 数据点分布情况

图 2 起点及候选打卡点数据二维可视化

根据三个附件起点及候选点平面坐标对数据进行可视化,如图 2 所示,图中红色的×表示起点,三角形表示难度系数为 1(附件 3 的难度系数最低为 2)即低难度检查点,这些点为本题的终点候选集。对比(a)、(b)、(c)可知,三道题的难度应当为逐步递增,附件 1 的总节点数为 100,附件 2 的总节点数为 150,而附件 3 的总节点数为 200。且附件 3 的难度范围从附件 1 和附件 2 的 1-4 变为 2-6(起点难度值皆为 1)。

3.2 问题一与问题二分析

问题二仅在问题一的基础上,增加规则 3,因此,两题可以用相近的思路进行分析和求解。本题共提出 7 个约束条件,约束条件较多,且考虑到定向越野在实际应用中可能会有更多约束,因此本题可以逐步满足规则求取可行解集,再逐步优化。通过分析各规则,可以得出以下推论:

(1) 初始化路径数量 N 后,可以结合规则 1 和规则 2(第二问需要加上规则 3)可以确定各路径大致的节点数量,通过搜索算法可以确定具体节点编号,获取可行解集合;

(3) 结合规则 4 和规则 6,可以对各节点序列进行最短路径求解,对比各路径重复片段数量,并将这个重复片段数量最小作为优化目标。

(4) 根据规则 5,可以将检查点数量 20(含两个公共检查点)用于求取初始解。

(5) 根据规则 7,在问题一和问题二中,仅需考虑不同赛道同时抵达的情况。因参赛选手平均行进速度是 6km/h, 1min 行进路程为 100m,因此只需统计各节点在各路径中出现的次数大于 5 的情况,如果各路径中起点到此类节点的路程差小于等于 100,则认为会有两个选手同时抵达,如果同时抵达数量大于 5,则舍弃该条路径。

因此,本题可以转变为一个多目标多路径规划问题。常见的求解方法包括智能算法、启发式算法以及数学优化方法。

求解各赛道容纳的总人数时,可以分为各赛道选手出发间隔相同以及各赛道选手出发时间不同两种情况分别进行讨论。

3.3 问题三分析

本题给出某次定向越野比赛赛道设计以及选手信息,要求设计满足比赛选手平均完成时间不低于 2 小时,比赛总完成时间不超过 3.5 小时的约束,且路线数量尽可能少、比赛时长尽可能短的设计方案,并对选手进行分配。

本题可以利用问题二的模型及求解思路获取问题三的初始解集,而后利用选手信息对赛道进行挑选。最后对选手分配策略进行优化。

四、问题一建模与求解

本题为多目标多路径规划问题。其核心优化目标为参赛选手容量最大化,因为各路径首发选手需要同时出发,因此,该目标可以转变为最大化路线数量 N 。即 $\max N$ 。本文将考虑闭合路径及非闭合路径两种方式,即起点也在终点的候选集中。据此,我们分为两步构建模型:

4.1 路线设计目标约束

记 $R_i = \{r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in_i}\}$ 为第 i 条路径（最短路径）的节点序列，其中 r_{ij} 表示第 i 条路径中第 j 个节点的编号， n_i 表示第 i 条路径的节点个数。设 $n = \max_{0 < i < N} (n_i)$ 表示所有路径节点数目的最大值。

约束一：规则 1 要求不同路径的长度尽可能均匀。

本文选用欧式距离作为两节点之间的长度，记第 i 条路径中第 j 个节点的编号的坐标为 (x_{ij}, y_{ij}) 。因此，第 i 条路径的长度 l_i 为

$$l_i = \sum_{j=2}^{n_i} \sqrt{(x_{ij} - x_{i(j-1)})^2 + (y_{ij} - y_{i(j-1)})^2} \quad (1)$$

则规则 1 可以用各路径长度的方差尽可能小表示，记各路径的平均长度为 $\bar{l} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l_i$ ，取一个正数 ε ($\varepsilon \geq 0$)，使得

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (l_i - \bar{l})^2 \leq \varepsilon \quad (2)$$

约束二：规则 2 要求不同路径的总打卡难度尽可能均匀。

记各路径节点的难度为 $W_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in_i})$ ，则各路径的难度平均值为 $\bar{w} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sum_{j=0}^{n_i} w_{ij})$ 因此，规则 2 可以表示为所有路径的难度和小于 μ ($0 \leq \mu \leq 4$)。

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sum_{j=0}^{n_i} w_{ij} - \bar{w})^2 \leq \mu \quad (3)$$

约束三：规则 4 和规则 6 要求避免包含较多重复路段，且同一路线中打卡顺序应尽可能连续，路线长度尽可能短。（问题 1 不需要考虑规则 3 爬高量）

重复路径表示在两个最短路径序列中，两个相同节点相邻出现，因本题路径为相同起点和相同终点，因此不考虑逆向路径的可能，即不考虑两条路径同时存在节点 $A \rightarrow$ 节点 B 和节点 $B \rightarrow$ 节点 A 的情况。据此我们构建一个新的路径序列矩阵 M_i 。

$$M_i = [m_{ik}] \quad (4)$$

$$m_{ik} = r_{ik} \times 10 + r_{i(k+1)}, k = 1, 2, \dots, n_i - 1$$

即假设存在一个节点序列 $[1, 2, 3, 4]$ 则该序列对应的路径序列为 $[12, 23, 4]$ 。则该路径与其他路径的重复路段可以通过获取路段对比矩阵 M^i 获取。注意， M^i 的初始值为一个 $(N-1) \times n$ 维的全零矩阵，而后通过式 (5) 对 M^i 中的元素进行更新。

$$M_{(N-1) \times n}^i = [m_{ab}^i]$$

$$m_{ab}^i = \begin{cases} 1 & \exists m_{ab} - m_{ik} = 0 \\ 0 & \forall m_{ab} - m_{ik} \neq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$a = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, N$$

$$b = 1, 2, \dots, n_a$$

其中 m_{ab}^i 表示若路段 m_{ab} 在路径序列 M_i 中有相同的数值，则记为 1，否则记为 0。对比矩阵 M^i 各行元素之和表示第 i 条路径与各路径的重复路段数量，因此，约束三可以表示为 M^i 各行元素之和的最大值，即第 i 条路径与其他路径重复路

段的最大值小于 $\gamma (0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2} \min(n_i))$,

$$\max_{0 < i \leq N} (\sum_{a=1}^{N-1} m_{ab}^i) \leq \gamma \quad (6)$$

约束四：同时抵达同一检查点的参赛选手数量不超过 5 人

据此，在路径设计阶段只需要考虑在各路径中出现次数大于 5 的节点，这样的节点记为 Q 。通过检查节点 Q 的路径记为 $[q_1, \dots, q_c, \dots, q_c]$, $5 < C < \min(N, 20)$ 。同时使之抵达时间差不超过 1min，通过计算起点通过各路径抵达节点 Q 的时间（含路程及任务） $D^Q = \text{sorted}[d_1, \dots, d_c, \dots, d_c]$ ， D 为各路径抵达时间从小到大排序的结果。因此，约束四可以表示为

$$\begin{aligned} \min(D_{p+5}^Q - D_p^Q) &> 1 \\ 1 \leq p &\leq C - 5 \end{aligned} \quad (7)$$

约束五：参赛选手完成任务的平均时间不低于 2 小时，总完成时间不超过 3 小时（在路线规划阶段仅考虑单路线总时长不超过 3 小时）。

选手完成任务时间包括路上的时间以及打卡时间。已知参赛选手的平均速度 $v_0 = 6\text{km/h}$ ，因此约束五可以表示为

$$\frac{\sum_{i=1}^N (\frac{l_i}{v_0} + \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij})}{N} \geq 2 \quad (8)$$

$$\max(\frac{l_i}{v_0} + \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}) \leq 3 \quad (9)$$

综上所述，问题 1 路径规划问题的数学表达式为

$$\begin{aligned} &\max N \\ &\min \varepsilon, \mu, \gamma \\ &\text{s.t.} \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (l_i - \bar{l})^2 \leq \varepsilon \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} - \bar{w})^2 \leq \mu \\ \max_{0 < i \leq N} (\sum_{a=1}^{N-1} m_{ab}^i) \leq \gamma \\ \min(D_{p+5}^Q - D_p^Q) > 1 \\ \frac{\sum_{i=1}^N (\frac{l_i}{v_0} + \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij})}{N} \geq 2 \\ \max(\frac{l_i}{v_0} + \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}) \leq 3 \\ i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, n_i \\ \varepsilon, \mu, \gamma \geq 0 \\ 1 \leq p \leq C - 5, \\ j = 1, 2, \dots, n_i, N \geq 22 \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

4.2 路线设计目标求解

本文选用三种不同方式进行求解,即遗传算法^[3] (智能算法)、A* 算法^[6] (启发式算法)及 CPLEX 算法^[7] (数学优化技术)其中求取最短路径的算法则采用 Dijkstra 算法。

4.2.1 算法基本介绍

(1) Dijkstra 算法

Dijkstra 算法本质为贪心思想的实现,首先需要获取起点到各点的距离并寻找最短路径,通常采用二维数组进行存储;第二步则需要引入一个布尔数组,用于记录各节点是否确定了最短长度;第三步从初始点开始,寻找周边邻接点的最小值,并记录权重;第四步继续寻找最短路径的下一个点,并记录权重,直至所有的点都在路径内。其运行原理如图 4 所示。

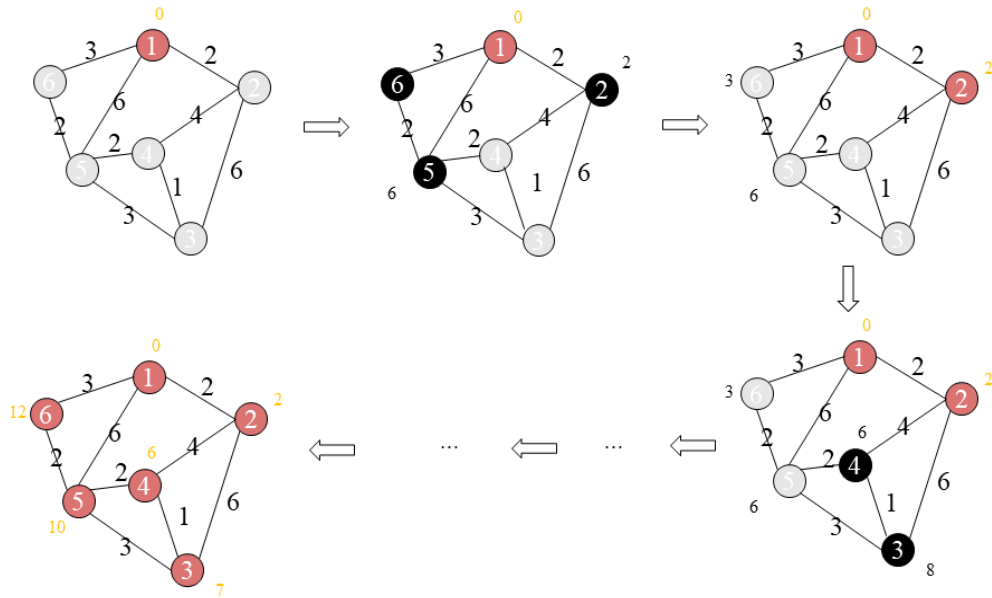


图 4 Dijkstra 算法运行步骤

其中红色点代表确定了最短距离的点,黑色点为候选路径点,灰色点为尚未确定最短路径点。此算法的主要作用在于对初始化的路径序列 R 进行最短路径排序。

(2) 遗传算法

遗传算法是模拟种群进化的一种仿生算法,染色体是遗传物质的主要载体,即多个基因的组合;个体是由基因编码得到的,因此个体实际上是染色体中带有特征的实体;形成一定数目的个体后,即形成种群。而遗传算法则主要是模拟种群进行进化(优胜劣汰)的过程进行求解,其算法步骤包括① 编码;② 初始化种群;③ 对种群个体适应度进行评估;④ 按照优胜劣汰和适者生存的原理选择个体;⑤ 模拟自然遗传学进行染色体交叉和变异;⑥ 逐步迭代,求取最终解。其基本流程如图 5 所示。

遗传算法的编码包括二进制编码、格雷码编码、实数编码、符号编码等;交叉运算包括单点交叉、双点交叉以及均匀交叉等;而变异则包括基本位变异、均匀变异、高斯变异以及二元变异等。单遗传算法用于解决不同问题的核心在于适应度评估方法的差异,针对本题,各个约束条件即为适应度评估算法。

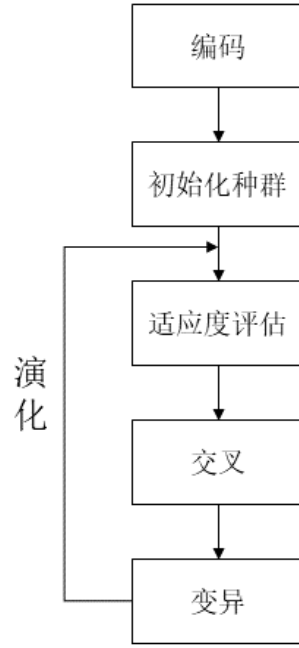


图 5 遗传算法基本流程

(3) A* 搜索算法

A* 搜索算法解决的问题为假设从起点 S 抵达终点 E 之间存在一堵墙，如何找出从起点到终点之间的最优路径。A* 搜索算法的核心思路为：

第一步：将搜索区域划分为正方形格子，以简化搜索步骤。

第二步：引入布尔数组，记录当前方格周边各自是否为路途经过的；引入 open list，记录当前点位置以及可走以及可到达的方格；引入 close list，记录已经经过且无需考虑的方格。

第三步：从起点开始，利用路径排序函数

$$F = G + H \quad (11)$$

其中 G 表示从起点 A 抵达可达方格的代价函数， H 表示从指定方格移动到终点 S 的成本估计函数（类似于遗传算法中的适应法则）。

第四步：求取当前点周边可达方格的函数得分，得分最低的方格即为下一个方格。

第五步：不断遍历更新，直至求出最终结果。

(4) CPLEX

CPLEX 是一种数学优化技术，其主要作用在于提升效率，快速获取策略并提升收益率。该方法可以将复杂的业务问题转变为数学规划模型。此方法的优势在于可以完整简洁地表达本题的各种约束及目标。

4.2.1 模型求解基本设置及结果

因本题约束较多，所以本文主要采取探索式做法，通过从不同的角度、不同模型以及不同策略进行对比，最终筛选出最优结果。主要策略包括：（1）采用智能算法、启发式算法以及 CPLEX 同时求解，同时对求解结果进行综合评价。（2）设定终点候选集以及必经检查点候选集。终点候选集为全体任务难度等于 1 的点，必经检查点候选集选取原则包括两种：

① 尽量使起点、终点以及两个必经检查点均匀分布，具体步骤如下：

第一步：获取赛道起点和终点（从终点集随机选择）位置信息；

第二步：利用 k-means 算法将数据聚为 2-3 类，必经检查点候选集即为起点和终点以外的类别。

k-means 聚类主要通过随机初始化聚类中心，通过计算各点到聚类中心的距离，从而进行分类；分类完成后根据各聚类中的元素更新聚类中心；直至不再有点或者聚类中心发生变化或者误差平方和局部最小。

② 全体节点随机

4.2.1 模型求解基本设置及结果

结果表明，智能算法效果最佳，其结果如下：通过策略一，即先利用 k-means 进行聚类，再获取必经检查点候选集的方式，求解各模型，得出路径条数分别等于 4, 5, 6, 7, 8, 9 的可行解。结果如表 1 所示。

表 1 问题一策略 1 可行解集

路径条数	难度方差	难度极差/分	总长度方差	总长度极差/m	完成时间方差	完成时间极差/分钟
4	0.25	1	979.5805	73.2894	0.638	1.7329
5	0.7	2	14545	292.8362	0.5225	1.9284
6	0	0	10958	265.1578	1.0958	2.6516
7	1.9048	3	29691	534.4497	1.3559	2.8234
8	0	0	149560	1003	14.9557	10.0293

在不考虑比赛选手目标约束时，策略 1 的可行解中，路径条数 $N = 5$ 相对而言综合效果最好。通过策略 2，即必经检查点从所有点（除起点和终点外）的集合中选取，结果如表 2 所示。

表 2 问题一策略 2 可行解集

路径条数	难度方差	难度极差/分	总长度方差	总长度极差/m	完成时间方差	完成时间极差/分钟
4	0.25	1	14525	284.477	0.6453	1.8448
5	0.2	1	534.9117	57.2998	0.1999	1.2239
6	0.1667	1	69025	664.7699	5.7415	5.6477
7	0.2857	1	53836	527.8809	4.6854	5.3523
8	0.2857	1	30315	500.7608	2.597	4.932
9	0.6111	2	138520	931.3254	11.4458	8.3133

在不考虑比赛选手目标约束时，策略 1 的可行解中，路径条数 $N = 5$ 相对效果最佳。

4.3 比赛选手目标约束

比赛选手的目标为出发时间间隔 T 最短（等价于参赛人数最多）。据此有两种设计方案，第一种为所有批次选手都同时参赛，尽管这种设计方案人数较少，但更加便于比赛操作与实际应用。第二种为只要该赛道满足比赛约束，下一位选手即可进入赛道开始比赛。

4.3.1 同一批次选手同时出发

与比赛选手相关的约束主要包括约束四，即同时抵达检查点的人数不超过 5 人，以及总完成时间不超过 3 小时。

根据约束四，同时抵达检查点的人数不超过 5 人，因此，参赛选手出发间隔必须保证不会与前一批次选手冲突。在 4.1 中，已知起点通过各路径抵达节点 Q

（同时出现在 5 条路径以上的检查节点）的时间 $D^Q = \text{sorted}[d_1, \dots, d_c, \dots, d_c]$ ，因此，只需要保证次批抵达的选手与上一批抵达的选手同时抵达人数不超过 5 即可。因次批选手抵达 Q 节点的时间为 $d_c + T$ ，记连续两批次通过各路径抵达节点 Q 的距离的序列为 $D = \text{sorted}[d_1, \dots, d_c, \dots, d_c, d_1 + T, \dots, d_c + T, \dots, d_c + T]$ ，约束四可以表示为

$$\begin{aligned} \min(D_{p+5} - D_p) &\geq 1 \\ 1 \leq p &\leq C - 5 \end{aligned} \quad (12)$$

根据式(12)即可求出 T 的最小值。根据各赛道路程和难度可以求出各赛道总时长 $t = [t_1, t_2, \dots, t_N]$ ，其中 $t_i = \frac{l_i}{v_0} + \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}$ ，因此，选手轮数的计算公式如式(13)表示。

$$\text{round}_i = \left\lfloor \frac{3}{t_i + T} \right\rfloor \quad (13)$$

式(13)中的 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示向下取整，即轮数等于 3 小时除以单路径最大时长。

4.3.2 各赛道选手出发间隔不同

题目要求选择同一条路线的参赛选手按照一定的时间间隔错时出发，因此，设各赛道选手出发时间间隔为 $T^* = [T_1^*, T_2^*, \dots, T_N^*]$ ，从全局考虑，本文将采用同时分析第一轮第一名选手到第三轮的第六名选手的情况。各选手通过各路径抵达节点 Q 的距离分别为： $D^* = \text{sorted}[d_c, \dots, d_c + T_c^*, \dots, d_c + 2T_c^*]$ ，其中 T_c^* 表示经过 Q 节点的路径 c 对应的选手间隔。

同一节点不超过 5 人的约束可以表示为：

$$\begin{aligned} \min(D_{p+5}^* - D_p^*) &\geq 1 \\ 1 \leq p &\leq C - 5 \end{aligned} \quad (14)$$

各赛道的选手的最大轮数为

$$\text{round}_i^* = \left\lfloor \frac{3}{t_i + T_i^*} \right\rfloor$$

因此，各赛道选手出发间隔不同的情况可以转换成一个目标规划问题。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_i^N \text{round}_i^* \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \min(D_{p+5}^* - D_p^*) \geq 1 \\ 1 \leq p \leq C - 5 \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

4.3.4 参赛选手数量求解

综合对比发现，所有赛道间隔时间相同和不同对参赛选手数量无影响，结果如表 3 所示。

表 3 参赛选手数量求解结果

策略	路径条数	总参赛选手数量	每条路径参赛选手数量
策略 1	4	193	48, 47, 48, 50
	5	321	64, 64, 65, 63, 65
	6	143	23, 23, 24, 23, 24, 26

策略 2	7	275	51, 55, 52, 54, 55, 55, 53
	8	536	60, 64, 70, 71, 71, 73, 66, 61
	4	199	49, 50, 51, 49
	5	195	38, 40, 39, 39, 39
	6	252	40, 46, 41, 39, 46, 40
	7	301	42, 42, 40, 45, 45, 40, 47
	8	483	61, 57, 63, 62, 58, 61, 61, 60
	9	424	41, 46, 47, 43, 51, 43, 50, 51, 52

综合对比发现,采取策略 1,路径数量为 5 相对最优,总参赛选手数量为 321。而策略 2 中,路径数量为 8 相对最优,此时参赛选手数量为 483,但策略 1 的 5 条路径总完成时长表现最佳,说明该设计路线均匀。因此,我们选用此结果的路线长度及难度作为我们的目标,最终总人数为 321 人。

最终我们采用策略 1 的 5 条路径,其路径图如图 6 所示。

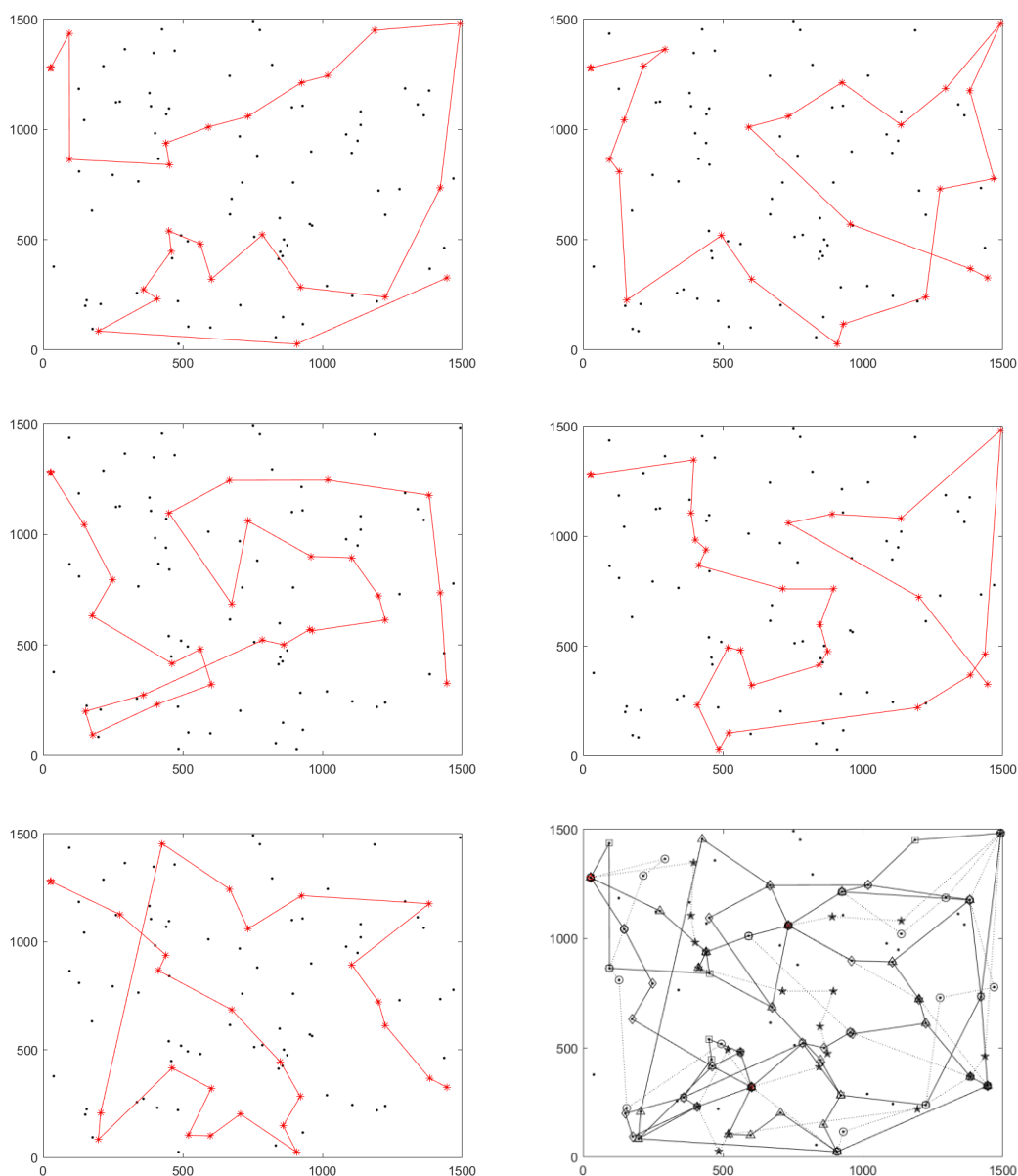


图 6 策略 1 生成的五条路径图及汇总图

图 6 中最后一张图为所有路线的汇总图。

五、问题二建模与求解

5.1 问题二建模

问题二相较于问题一，仅规则一长度计算发生改变，同时增加了一个约束条件和一个优化目标，即规则三，不同路线的爬高量应尽可能均匀。

已知 $R_i = \{r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in_i}\}$ 为第 i 条路径（最短路径）的节点序列，其中 r_{ij} 表示第 i 条路径中第 j 个节点的编号，记 r_{ij} 的坐标为 (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) 。

规则一：路径长度尽可能均匀

与问题一类似，选用三维欧式距离作为两节点之间的长度，即第 i 条路径的长度 l_i^* 为

$$l_i^* = \sum_{j=2}^{n_i} \sqrt{(x_{ij} - x_{i(j-1)})^2 + (y_{ij} - y_{i(j-1)})^2 + (z_{ij} - z_{i(j-1)})^2} \quad (16)$$

其余设定与问题一相同。

规则二：爬高量尽可能均匀

路段的爬高量用起点和终点之间的 Z 坐标升高量表示，若无升高量则记为 0。路径 i 的爬高量可以表示为 $H_i = [h_1, h_2, \dots, h_{n_i-1}]$ ，其中

$$h_j = \begin{cases} z_{i(j+1)} - z_{ij}, & \text{if } z_{i(j+1)} - z_{ij} > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

$j = 1, 2, \dots, n_i - 1$

则各路径的爬高量平均值为 $\bar{h} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sum_{j=0}^{n_i-1} h_{ij})$ 因此，规则 3 可以表示为所有路径的爬高量的方差小于 $\nu (\nu \geq 0)$ 。

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sum_{j=0}^{n_i-1} h_{ij} - \bar{h})^2 \leq \nu \quad (18)$$

同时，增加一个目标 $\min \nu$ 。

本题其他约束与问题一相一致，因此不再做重复描述。

5.2 问题二求解

本题求解方式与问题一一致，结果如表 4 和表 5 所示。

表 4 问题 2 策略 1 求解结果

路径条数	难度方差	难度极差/分	总长度方差	总长度极差/m	爬坡量方差
4	1	2	17882	300.5574	1
5	0.2	1	22332	295.495	4.5
6	0.2667	1	46267	506.6689	3.4667
7	0.2857	1	142240	983.1074	1.4762
路径条数	爬坡量极差/米	完成时间方差	完成时间极差/分钟	总参赛选手数量	每条路径参赛选手数量

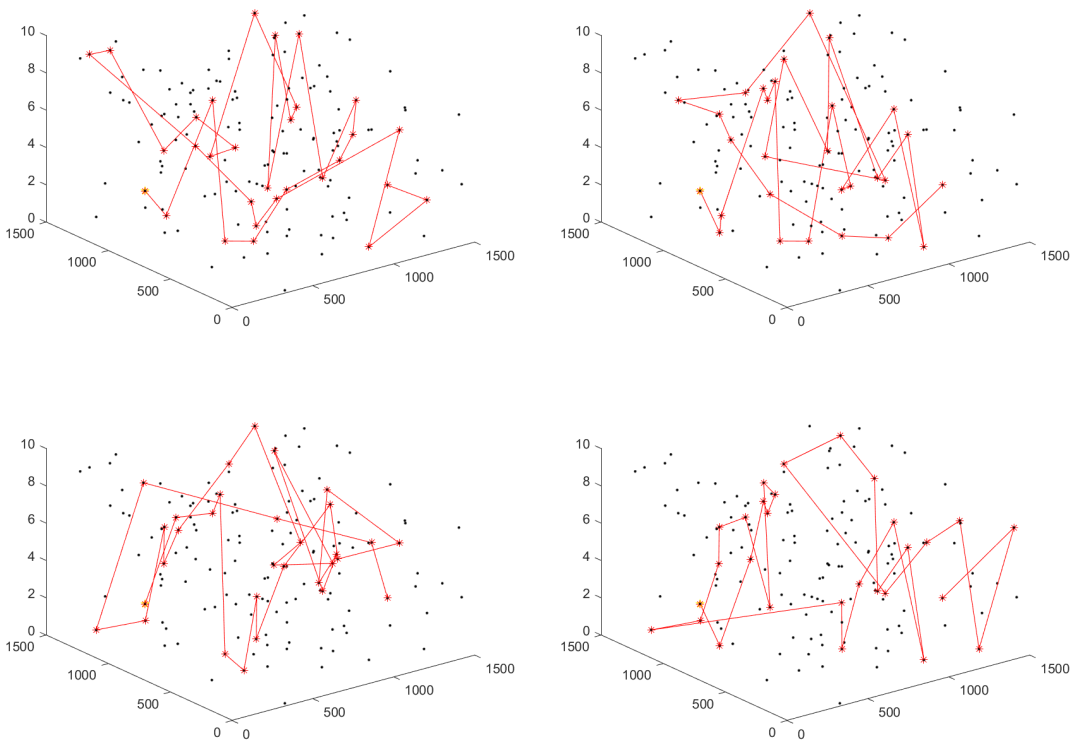
4	2	0.1778	1.0056	168	42, 43, 41, 42
5	5	2.9009	3.5868	231	44, 48, 44, 47, 48
6	5	2.8424	4.0667	138	26, 25, 23, 22, 21, 21
7	3	13.7549	9.6197	198	25, 25, 36, 26, 29, 24, 33

其中路径等于 6 未通过检验，不符合题目要求。

表 5 问题 2 策略 2 求解结果

路径条数	难度方差	难度极差/分	总长度方差	总长度极差/m	爬坡量方差
4	0.25	1	214.7534	33.6426	0.9167
5	0	0	11838	269.6034	0.7
6	0	0	7578	221.2723	3.4667
7	0.8095	2	43068	580.8116	5.3333
路径条数	爬坡量极差/米	完成时间方差	完成时间极差/分钟	总参赛选手数量	每条路径参赛选手数量
4	2	0.3027	1.2593	191	47, 48, 48, 48
5	2	1.1828	2.696	175	34, 35, 34, 35, 37
6	5	0.7578	2.2127	245	42, 40, 41, 40, 42, 40
7	5	2.5727	3.8081	246	34, 38, 34, 34, 34, 34, 38

综合对比发现，选取策略 1 且路径条数为 5 综合评估最优，此时各路径能容纳的最大人数为 231 人。结果对应的路径图如图 7 所示。



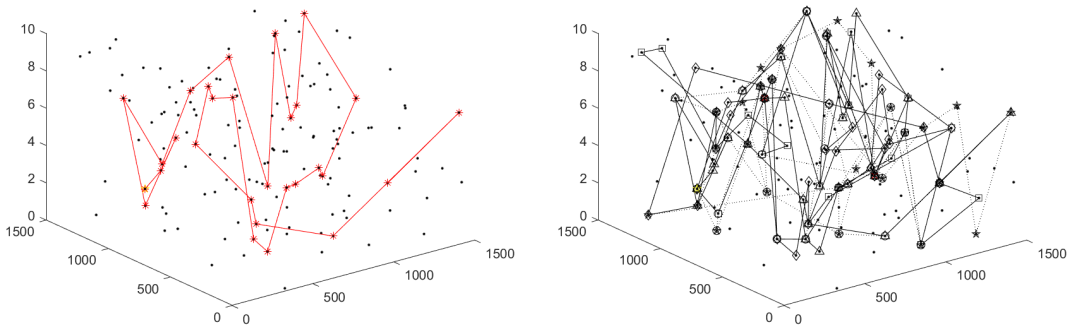


图 7 问题二的五条路径图及汇总图

图 7 中最后一张图为所有路线的汇总图。综合对比可得，两道题都为策略 1 效果更好。

六、问题三建模与求解

本题给定某次越野比赛的路径节点信息以及参赛选手的数据，要求我们对路径进行规划，要求平均完成时间不低于 2h，比赛总时长不超过 3.5h。优化目标为路线尽可能少，完成时间尽可能短。

6.1 问题三建模

(1) 获取初始解

本题优化目标包括路线尽可能少（即 $\min N$ ）以及完成时间最短（即 $\min T_w$ ）。对此本文将 $\min N$ 以及路线设计规则初始化一个可行解，再根据参赛选手信息对路径进行进一步优化。

(2) 逐步优化

设各路线选手间隔时间为 $T^*=[T_1^*, T_2^*, \dots, T_N^*]$ ，将各选手按速度从大到小进行排序，而后将选手 $\theta=[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_g, \dots, \theta_{120}]$ 根据速度越快则分配的赛道总路程最远的原则进行分配，选手的速度分别为 $v=[v_1, v_2, \dots, v_g, \dots, v_{120}]$ 。

此时选手仅需满足同时抵达一个检查点的人数不超过 5，比赛总完成时长不超过 3.5 小时两个约束条件。具体优化步骤如下：

第一步初始化各路径的最短时间间隔为最大任务难度 $H_m = 4$

第二步：统计同时在 5 条以上路线中出现的节点 $Q=[Q_1, Q_2, \dots, Q_n]$ ，将选手分配完成后，从初始路线解集中选取路径数最小的解 N_0 开始遍历，计算抵达节点 Q 的选手数目 num 。

① 若 $\exists num > 5$ ，则检测路径数为 N_0+1 的路线解，直至找到符合条件的 N_1 。

② 若 $\forall num \leq 5$ ，则 $H_m = H_m - \frac{1}{60000}$ ，获取满足条件的最小时间间隔。其中

$\frac{1}{60000}$ 分钟代表 1 毫秒，为当前市面上常见计时器的最小显示单位。为节省算力，我们先利用二分法确定一个小范围有解区间再进行迭代。

第三步：计算此时的比赛总时长，若不超过 3.5，则当前解即为所求，否则

开始检测节点数目为 N_1+1 的路径，重复第一步到第二步，直至找到满足条件的 N_2 。

第四步：针对节点数目为 N_2-1 的路径，通过随机给选手分配路径，重复第一步到第二步，检测是否存在满足条件的可行解。

- ① 若存在可行解，则继续检测节点数目为 N_2-1 的路径；
- ② 若不存在，则求 $N_3 = N_2 + 1$ 的最优分配方案即为所求。

6.2 问题三求解

最终求解可得，最小路径条数为，各线路参赛选手数量分别为；各路线检查点数量分别为；总难度分别为；爬高量分别为。各路径的路线图如图 8 所示。

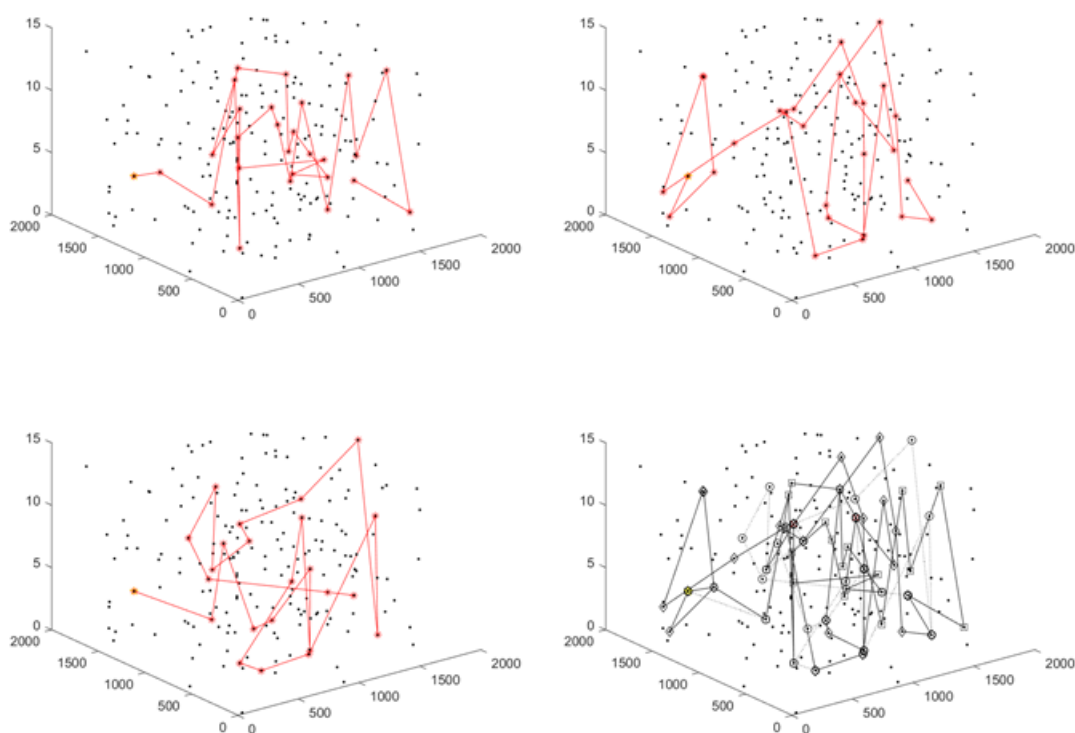


图 8 路径图

- ① 最小路径条数 3 条；
- ② 必经节点序号为 183 和 195，终点为 168；
- ③ 各路线参赛选手数量分别为 40，40，40；
- ④ 总长度为 7.475，7.570，7.518；
- ⑤ 总难度为 104，104，105；
- ⑥ 爬高量为 63，53，65。

七、模型评价

7.1 模型优点

- (1) 本文采用多种方法多种思路从不同角度建模，更具全面性。

(2) 利用智能算法、启发式算法以及数学优化方法综合求解，互相对比验证。

(3) 通过知网、web of science 获取与越野相关论文的词云图，选取出现节点最大的方法，保证方法的经典性。

(4) 模型的扩展性及迁移性较好，且考虑了实际应用。

7.2 模型缺点

因时间关系，我们仅能实验智能算法、启发式算法以及数学优化方法中的一种；

参考文献

- [1] 李海燕, 李海珍. 定向运动与野外生存实用手册 [M] 北京:科学出版社, 2012:40.
- [2] 张铁良, 邢启明, 张洁. 定向越野路线设计原则与实践[J]. 国防科技, 2018(2):123-127.
- [3] George T, Amudha T. Genetic Algorithm Based Multi-objective Optimization Framework to Solve Traveling Salesman Problem[M]//Advances in Computing and Intelligent Systems. Springer, Singapore, 2020: 141-151.
- [4] Nazarahari M, Khanmirza E, Doostie S. Multi-objective multi-robot path planning in continuous environment using an enhanced genetic algorithm[J]. Expert Systems with Applications, 2019, 115: 106-120.
- [5] 吴天羿, 许继恒, 刘建永,等. 基于改进 A*算法的越野路径规划研究[J]. 计算机应用研究, 2013(06):1724-1726.
- [6] Zhang G, Hsu L T. A new path planning algorithm using a GNSS localization error map for UAVs in an urban area[J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2019, 94(1): 219-235.
- [7] Kia R , Shahnazari-Shahrezaei P , Zabihi S . Solving a multi-objective mathematical model for a Multi-Skilled Project Scheduling Problem by CPLEX solver[C]// IEEE International Conference on Industrial Engineering & Engineering Management. IEEE, 2016.
- [8] 车建涛, 高方玉, 解玉文,等. 基于 Dijkstra 算法的水下机器人路径规划[J]. 机械设计与研究, 2020, v.36;No.185(01):54-58.