

## 2023 年湖南省研究生数学建模竞赛

### A题 图像恢复问题

随着科学技术的不断发展，信息的交流和获取已不再受到时空的限制，而且成为人们日常生活中不可或缺的一部分。图像作为信息的重要载体，起着不可替代的作用，尤其是人们在探索宇宙奥秘的过程中，通过射电望远镜来探测来自天体的射电波，从而可以测量获得天体射电的强度、频谱等相关信息，然后将这些信息记录下来并进行一系列处理，最终得到天体或宇宙的图像。比如我国建在贵州的500米口径球面射电望远镜(Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope), 简称天眼FAST。天眼FAST的高灵敏度和高巡天效率，使其能对检测到银河系和河外星系的中性氢，进行高质量成图，如下图：



图1 宇宙氢原子气体结构图

另外，在我们生活的很多实际问题中，也是很难直接获取图像信息，往往只能测量获得图像的频谱。比如为了获得某个物体目标的图像信息，将一个光源发出的高强度相干波照射到该目标上之后，得到的光波就带有了该目标的信息。在传播一定距离之后，形成衍射强度，通过该衍射强度可以得到目标的频谱。接下来基于频谱信息来获取目标的图像信息，最终得到目标的图像。事实上，不管是宇宙中的天体测量还是我们生活中的一般图像测量，我们测得的强度或频谱信息，都是含有一定噪声的，也就是我们需要基于含噪声的强度或频谱信息，来恢复图像。

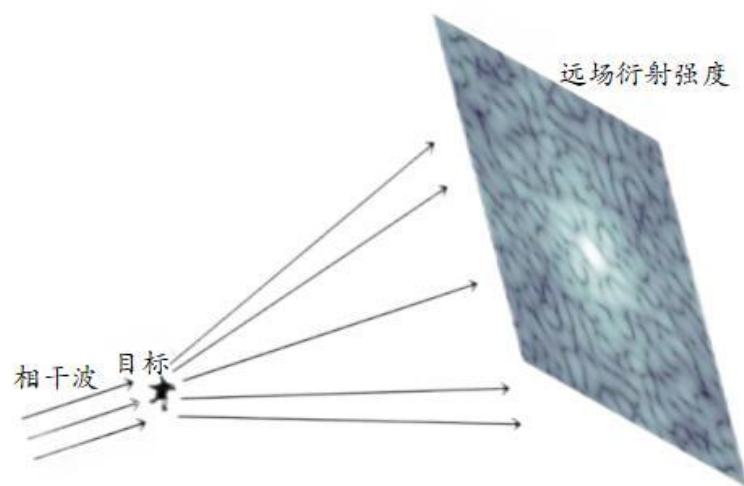


图2 相干衍射图

**注：**根据噪声的统计特性，常见的噪声类型有高斯噪声，泊松噪声，脉冲噪声和瑞利噪声等噪声。

请你们团队通过数学建模来研究以下问题。

**问题1：**若对于一幅 $256 \times 256$ 的图像，对其频谱进行过采样，即将其放置于 $512 \times 512$ 的网格的中心，剩余的像素值为0，然后进行离散傅里叶变换，可以得到相应的 $512 \times 512$ 频谱信息。已知图像的含噪声频谱且该噪声为某一种类型噪声，图像的含噪声频谱见附件1。请建立相应的数学模型，给出相应的去噪算法，并恢复原图像，将恢复的图像结果填入附件4中。另外，从多个角度来分析图像的恢复效果，并讨论哪些因素会影响图像的恢复。

**问题2：**对两幅 $256 \times 256$ 的图像的频谱进行过采样，得到各自相应的 $512 \times 512$ 含噪声频谱信息，分别见附件2和3，且它们的噪声均为多种类型噪声的混合，即为混合噪声。此时请建立相应的数学模型，给出相应的去噪算法，并恢复原图像，将恢复的图像结果分别填入附件5和6中。

**问题3：**在基于频谱信息来恢复图像的过程中，为了提高图像的恢复概率，需要对频谱进行过采样以及获取图像的相关先验信息，请分析过采样率和相关先验信息如何影响图像的恢复概率。请大家自己构造含噪声的频谱信息数据，基于在不同的过采样率以及相关先验信息下，并结合问题1和问题2中的模型，给出图像的恢复概率。