文章编号: 1008 - 2042(2000) 02 - 0020 - 03

大气污染的数学模型

汤永龙
(武陵高等专科学校,湖南 张家界　427000)

摘　要:建立了大气污染的数学模型及其抛物型线性方程的 Fourier 变换求解方法。

关键词:大气污染;模型;Fourier 变换
中图分类号: O29:TB11　　**文献标识码**: A

1　引言

张家界是世界上著名的旅游胜地,已被国际教科文组织列为世界文化遗产名录。1999 年 12 月 11 日举行的人类首次驾机穿越张家界天门山洞,又一次把世人的目光聚集在张家界。可天门山下水泥厂,石灰厂、纸厂等一些工厂及越来越多的汽车排出的有害烟尘,因大气的扰动而扩散,随气流而飘移,造成大气污染,危害环境,影响人类的身体健康。为此张家界市政府决定定量分析和预报大气的污染问题,还风景明珠张家界神奇美丽的山水上一片洁净的蓝天。

2　数学建模

2.1　条件假设

(1) 任取空间上一闭曲面 S 所围区域为 Ω,$C(x,y,z)$ 是有害烟尘的浓度。

(2) 有害烟尘随风向四周扩散,D_1,D_2,D_3 分别是 x,y,z 轴方向上的扩散系数。

(3) 有害烟尘在大气中有吸收衰减,吸收衰减系数为 $k > 0$.

(4) $\theta(x,y,z,t)$ 是 (x,y,z) 点上 t 时刻单位体积单位时间烟尘的排放量。

2.2　数量建模

由重积分的意义知道,通过 S 从 t 到 $t + \triangle t$ 时间内流入 Ω 的烟尘质量为

$$M_1 = \int_t^{t+\triangle t} \iint_s \left(D_1 \frac{\partial C}{\partial x}\cos\alpha + D_2 \frac{\partial C}{\partial y}\cos\beta + D_3 \frac{\partial C}{\partial z}\cos r\right) ds dt$$

其中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos r$ 是 s 的外法向余弦。由高斯公式得:

$$M_1 = \int_t^{t+\triangle t} \iiint_\Omega \left(D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_3 \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) dxdydzdt \tag{1}$$

由于吸收衰减,在 t 到 $t + \triangle t$ 时间内 Ω 内烟尘的成少量为

收稿日期:1999 - 12 - 11

作者简介:汤永龙(1961～) ,男,湖南张家界人,武陵高等专科学校,讲师,主要从事应用数学研究。

$$M_2 = \int_t^{t+\triangle t} \iiint_\Omega KC(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,dt \quad (2)$$

由于空气流动,烟尘随风从 t 到 t + △t 时间内流动飘出 S 的质理为

$$M_3 = \int_t^{t+\triangle t} \iint_\Omega (\mu C\cos\alpha + \upsilon C\cos\beta + \omega C\cos r)\,ds\,dt$$

其中(μ、υ、ω)是不变的风向量,由高斯公式得:

$$M_3 = \int_t^{t+\triangle t} \iiint_\Omega \left(\mu \frac{\partial C}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial C}{\partial y} + \omega \frac{\partial C}{\partial z}\right) dxdydzdt \quad (3)$$

由 S 内从 t 到 t + △t 时间内共排放出烟尘量为

$$M_4 = \int_t^{t+\triangle t} \iiint_\Omega \theta(x,y,z,t)\,dxdydzdt \quad (4)$$

从另一个角度看,由于浓度的变化引起的Ω内质量之增加量为

$$M_5 = \iiint_\Omega [C(x,y,z,t+\triangle t) - C(x,y,z,t)]\,dxdydz = \int_t^{t+\triangle t} \iiint_\Omega \frac{\partial C}{\partial t} dxdydzdt \quad (5)$$

由质量守恒定律得

$$M_5 = M_1 - M_2 - M_3 + M_4$$

由△t,t,Ω的任意性得大气污染的数学模型为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_3 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - kC - \mu \frac{\partial C}{\partial x} - \upsilon \frac{\partial C}{\partial y} - \omega \frac{\partial C}{\partial z} + \theta(x,y,z,t) \quad (6)$$

初始条件是

$$C(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z) \quad (7)$$

(6)、(7)式这是三维空间中的抛物型性方程。

3 抛物型线性方程的求解。

3.1 Fourier 变换的性质

记

$$\hat{C}(\xi,\eta,\zeta,t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} C(x,y,z,t)\,e^{-i(x\xi+y\eta+z\zeta)}\,dxdydz = F[C] \quad (8)$$

由(8)式定义的 Fourier 变换有下列主要性质:

(1)线性性质

$$F[\alpha f_1(x,y,z) + \beta f_2(x,y,z)] = \alpha F[f_1] + \beta F[f_2]$$

(2)微分性质

$$F[f_x(x,y,z)] = i\xi F[f] = i\xi \hat{f}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$F[f_y(x,y,z)] = i\eta F[f] = i\eta \hat{f}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$F[f_z(x,y,z)] = i\zeta F[f] = i\xi \hat{f}(\xi,\eta,\zeta)$$

(3)可逆性质,设 $F[f(x,y,z)] = \hat{f}(\zeta\eta,\zeta)$,则

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\zeta,\eta,\varphi)\,e^{i(x\zeta+y\eta+z\zeta)}\,d\zeta d\eta d\varphi = F^{-1}[\hat{f}].$$

3.2 由 Fourier 求解抛物线型方程

对(6)、(7)进行 Fourier 变换得

$$\frac{d\hat{C}(\xi,\eta,\zeta,t)}{dt} = -(D_1\xi^2 + D_2\eta^2 + D_3\zeta^2)\hat{C}(\xi,\eta,\zeta,t) - K\hat{C}(\xi,\eta,\zeta,t) - i\xi\mu\hat{C}(\xi,\eta,\zeta,t) - i\eta\upsilon\hat{C}(\xi,\eta,\zeta,t)\,i\xi\omega\hat{C}(\xi,\eta,\zeta,t) + \hat{\theta}(\xi,\eta,\zeta,t) \quad (11)$$

$$\hat{C}(\xi,\eta,\alpha,0) = \hat{\varphi}(\xi,\eta,\zeta) \quad (12)$$

(11)、(12)式是以 t 为自变量的一阶线性非齐次常微分方程的 Cauchy 问题,改写成

$$\frac{dC}{dt} = -(D_1\xi^2 + P_1\eta^2 + D_3\zeta\zeta^2 + K + i\xi\mu + i\eta\upsilon + i\zeta\omega)C + \theta(\xi,\eta,\zeta,t)$$

$$C|_{t=o} = \phi(\xi,\eta,\zeta)$$

解之得

$$C(\zeta,\eta,\phi,t) = e^{-(D_1\zeta^2 + D_2\eta^2 + D_3\zeta^2 + K + i\mu\xi + i\eta\upsilon + i\phi\omega)}$$

$$\times\left[\int_0^t \theta(\zeta,\eta,\phi,t)\, e^{-(D_1\xi^2 + P_1\eta^2 + D_3\zeta^2 + K + i\mu\xi + i\eta\upsilon + i\zeta\omega)} + t + g1\xi,\eta,\zeta\right] \quad (13)$$

再对(13)式中的 $C(\xi,\eta,\zeta,t)$ 进行反变换即可得 (x,y,ξ,t)

参考文献:

[1] 刘来福. 数学模型与数学建模. 北京:北京师大出版社,1997.

[2] 姜启源. 数学模型. 北京:高等教育出版社,1987.

[3] 王树禾. 数学模型基础. 北京:中国科学技术大学出版社,1996.

[4] M A Ball Mathematics in the Social and Life Sciences, Ellis Horwood Limited,1995.

[5] R Haberman Mathemcical Models, Prentice - Hall, Inc, 1997.

Mathematical Model of Air Pollution

TANG Yong - long

(**Wuling College**, **Zhangijajie** 427000, **China**)

Abstract: The article has established mathematical model of air pollation, as well as given the concret way of Fourior varying to solve the mathematical model

Key words: air pollution; fourior varying; mathematical model