

参赛密码 _____

(由组委会填写)

第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

学 校

南京财经大学

参赛队号

10327016

队员姓名

1.李叶涵

2.李雨泽

3.王丹华

参赛密码 _____

(由组委会填写)



第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题目：中国城乡居民养老制度可持续性的精算研究

摘 要

本文针对中国养老保险基金问题，基于当前养老保险体制，建立中国城乡居民养老保险基金收支模型，对养老金缺口进行定量研究，并预测养老金缺口未来趋势，通过计算机仿真手段，测算了保证养老保险体系可持续性的替代率和缴费率的最优区间，以及预测了相关政策措施的效果。

模型 I ——中国城乡居民养老金收入-支出精算模型 依据中国现行养老保险制度，在合理的假设下，分多个层次（基本养老金和企业年金）、多个角度（城镇和农村），并考虑到新政策下“老人”、“中人”、“新人”的不同情况，构建具有“多缴多得，长缴多得”特征的中国城乡居民养老金收入精算模型（2.12）和中国城乡居民养老金收入精算模型（2.28），从而解决了问题一。

模型 II ——养老金缺口预测模型 依据养老金缺口形成原因和现实情况，基于修正后的模型 I，采用改进的 logistic 人口预测模型对参保在职人口的预测值和相应数据，建立养老金缺口预测模型（3.3），预测出 2013 年至 2035 年的养老金缺口值（结果见表 3.1），以及目标期间内养老金缺口的最大值发生在 2030 年，为 40.25 万亿元，并对预测结果的合理性进行分析；根据十八大提出的收入倍增

计划，将原模型中工资增长率调整为 7.06%，建立改进模型 (3.5)，从而解决了问题二。

模型Ⅲ——替代率、缴费率系统仿真模型 首先对各国养老保险模式进行分析评价(结果见表 4.1, 表 4.2); 其次, 建立替代率和缴费率的系统仿真模型(4.1, 4.4, 4.7), 通过计算机仿真, 运用 R 软件, 得出保证我国养老保险体系可持续的替代率、缴费率最优区间分别为 $[0.410, 0.712]$ 和 $[0.258, 0.292]$, 从而解决了问题三的第一部分。

模型Ⅳ——政策仿真评价模型 在模型Ⅲ基础上, 通过改变相应政策变量, 仿真预测了“推迟退休年龄”、“增加养老金计发年数”、“提高企业缴费率”、“下降养老金替代率”四项政策的效果(结果见表 4.4), 通过计算机仿真, 运用 R 软件, 得出该四项政策均使养老金缺口有所减小, 因此可以采用这些政策实现在矛盾最尖锐前过渡期的平稳过渡, 从而解决了问题三的第二部分。

模型Ⅴ——基于可调节变量的替代率、缴费率仿真模型 依据可调节变量的含义及其效用, 选择制度内抚养比为替代率和缴费率的可调节变量, 并运用层次回归技术, 对可调节变量进行检验; 将制度内抚养比作为可调节变量加入问题三中的替代率、缴费率系统仿真模型, 建立基于可调节变量的替代率、缴费率仿真模型(5.9, 5.11, 5.12), 再次进行系统仿真, 得到替代率、缴费率最优区间分别为 $[0.341, 0.750]$ 和 $[0.229, 0.249]$, 并对结果的合理性进行了检验分析, 从而解决了问题四。

最后, 本文对模型的优缺点进行了评价与改进, 并进行了推广。

关键词： 养老金收支模型；养老金缺口；系统仿真；可持续化；可调节变量

目 录

1 前 言.....	- 5 -
1.1 问题重述.....	- 5 -
1.2 知识储备.....	- 5 -
1.3 问题分析.....	- 6 -
1.4 模型假设.....	- 6 -
1.5 模型符号与说明.....	- 7 -
1.6 本文的架构设计.....	- 7 -
2 问题一的解答.....	- 8 -
2.1 问题一的分析.....	- 8 -
2.2 模型的建立.....	- 9 -
2.2.1 我国城乡基本养老保险金动态收入宏观数学模型.....	- 9 -
2.2.2 我国城乡基本养老保险金动态支出宏观数学模型.....	- 12 -
2.3 模型分析.....	- 16 -
3 问题二的解答.....	- 16 -
3.1 问题二的分析.....	- 16 -
3.2 模型的建立.....	- 16 -
3.2.1 logistic 人口预测模型.....	- 16 -
3.2.2 养老金缺口预测模型建立.....	- 17 -
3.3 实证分析.....	- 18 -
3.3.1 数据来源.....	- 18 -
3.3.2 实证结果.....	- 18 -
3.3.3 结果分析.....	- 20 -
3.3.4 模型改进.....	- 21 -
4 问题三的解答.....	- 21 -
4.1 问题的分析.....	- 21 -
4.2 国外养老保险制度分析比较.....	- 22 -
4.3 缴费率及替代率的系统仿真模型.....	- 24 -
4.3.1 模型建立.....	- 24 -
4.3.2 实证分析.....	- 25 -
4.3.3 结果分析.....	- 27 -
4.4 政策仿真评价模型.....	- 27 -
4.4.1 模型实现.....	- 27 -
4.4.2 结果分析.....	- 27 -
5 问题四的解答.....	- 28 -
5.1 可调节变量综述.....	- 28 -

5.1.1 可调节变量的定义.....	- 28 -
5.1.2 可调节变量的类型.....	- 29 -
5.1.3 调节变量的识别与检验.....	- 31 -
5.2 可调节变量的确定和检验.....	- 32 -
5.2.1 数据的采集.....	- 32 -
5.2.2 实证分析.....	- 33 -
5.3 基于可调节变量的替代率、缴费率仿真模型.....	- 34 -
5.3.1 模型建立.....	- 34 -
5.3.2 实证分析.....	- 35 -
6 模型评价和推广.....	- 35 -
7 参考文献.....	- 36 -

1 前言

1.1 问题重述

市场经济带来了经济效率的提高,也带来了贫富差距的不断扩大,从而社会保障体系引起人们越来越大的关注,人们称其为社会的“安全网”和“稳定器”,为了保障人民的生活,我们要坚持,建立完整的社会保障体系。其中社会养老保险称为现今社会下必不可少的养老方式,也是国家应对人口老龄化、缓解养老压力的必然方式。自1997年起,我国实行“统账结合”式社会养老保险制度,但是由于各省各地区财政实力、收入水平不同,一些地区采取“现收现付”制方法致使城镇养老保险个人账户“空账”严重,会引起国家隐形负债。随着人口急速老龄化,中国城乡居民养老保险体系引起各届学者专家讨论,多是定性分析多于定量分析,显然从系统的高度认清当前城乡养老保险形势,从定量角度把握各指标对养老保险金的影响深刻认识社会分配机制进而保障人民可持续生活是解决问题的有效途径。通过建立数学模型研究我国城乡养老保险体系是一个值得探究的方向。

利用附录中提供的及可以查找到的资料建立我国城乡养老保险体系的数学模型,建议包括:

1. 中国城乡居民(含新农保)养老金收入、支出的宏观数学模型;
2. 养老金缺口的合理分析;
3. 建立收入倍增后的改进模型;
4. 分析各国养老保险模式,结合我国国情,利用仿真手段寻找替代率和缴费率的合理区间;并进行相关政策评价;
5. 增加可调节变量后的数学模型。

1.2 知识储备

我国养老金制度改革的进程中,1997年国务院颁布的《国务院关于建立统一的企业职工基本养老保险制度的决定》(国发[1997]26号)和2005年《国务院关于建立统一的企业职工基本养老保险制度的决定》(国发[2005]38号)是对不同时代人群的养老金待遇水平产生重要影响的两个标志性文件。

按照国发[2005]38号文件规定,自2006年1月1日即养老新政正式实施后,养老金制度涉及的“老人、中人、新人”群体又被重新划定。“老人”指“新政”实施前,即2006年1月1日前已经退休的人员,仍按照国家原有规定发给基本养老金,并随以后基本养老金调整而增加养老保险待遇。“中人”指1997年之前参加工作,“新政”实施后缴费年限累计满15年的人员,由于他们以前个人账户的积累很少,退休后在发给基础养老金和个人账户养老金的基础上,国家将还将发给过渡性养老金。“新人”是指1997年后,即“国发”实施后参加工作的人员。他们的缴费年限(含视同缴费年限)累计满15年的,退休后按月发给基本养老金。基本养老金由基础养老金和个人账户养老金组成。退休时的基础养老金月标准以当地上年度在岗职工月平均工资和本人指数化月平均缴费工资的平均值为基数,缴费每满一年发给1%。个人账户养老金月标准为个人账户储存额

以计发月数，计发月数根据职工退休时城镇人口平均预期寿命、本人退休年龄、利息等因素确定。

1.3 问题分析

根据问题重述，本文探究中国养老制度的可持续化。该问题关键在于依据所给的信息及变量，建立中国城乡居民养老金收入-支出的宏观数学模型。同时，在此基础上进行模型预测，得出养老金缺口最大值，最后用仿真手段讨论相关变量的合理区间，保证模型可以反映养老保险体系的可持续性，并对未来缺口达到最大时提出合理性建议，使得养老金缺口情况得到改善。

为此从四个方面出发，分别建立模型。

对于问题一，根据问题中的变量以及附件中的相关数据，以中国现行城乡居民养老保险制度为依据，分多个层次（基本养老金和企业年金）、多个角度（城镇和农村）构建中国城乡居民养老保险收支模型，在支出模型中，根据现有规定，对“新人”、“中人”和“老人”分别构建养老保险支出模型，使得所构建模型更加符合现实。

对于问题二，一方面，根据问题一构建的模型、养老金缺口机制和数据的完整性对模型进行改进，本问题要求在目标期间内对养老金缺口进行预测，故数据要符合及时性，采用 logistic 人口模型对未来参保人口进行预测，最终得出 2013 年至 2035 年的养老金缺口预测值，以及在目标期间内养老金缺口最大值；另一方面，为了更好地实现十八大提出的收入倍增计划，对模型中的变量——工资增长率进行调整并求出新的模型形式，使模型更加具体化。

对于问题三，首先对各国养老保险模式进行分析评价，结合中国现实，有取舍地进行借鉴；其次，根据问题一中的模型，建立替代率和缴费率的仿真模型，通过计算机仿真，运用 R 软件，以养老金收支平衡代表我国养老系统可持续性的约束条件，得出替代率、缴费率最优区间；并在此基础上，建立政策方针评价模型，通过改变相应政策变量，仿真预测“推迟退休年龄”、“增加养老金计发年数”、“提高企业缴费率”、“下降养老金替代率”四项政策的效果。

对于问题四，依据可调节变量的含义及其效用，选择制度内抚养比为替代率和缴费率的可调节变量，并运用层次回归技术，对可调节变量进行检验；将制度内抚养比作为可调节变量加入问题三中的替代率、缴费率系统仿真模型，再次进行系统仿真，得到替代率、缴费率最优区间并进行实证分析。

1.4 模型假设

本文以中国城乡居民养老保险现行政策为基础，结合我国城乡居民参保的客观情况，构建精算模型，模拟并预测城乡居民养老保险基金缺口状况，提出假设前提如下。

假设 1：收集到的数据真实可靠；

假设 2：在预测年份内，无突发事件影响；

假设 3：由于数据收集困难，本文不考虑个人储蓄性养老保险体系和过渡性养老金；

假设 4：在目标期间内，现行城乡居民养老保险金制度模式保持不变；

假设 5: 随着城乡居民养老保险制度的完善, 城乡居民基本养老保险意识将逐步增强, 退保等行为以及由其引发的城乡居民养老保险基金非正常支出将会进一步得以控制并逐步消除, 因此本文不考虑城乡居民退保情况。

1.5 模型符号与说明

S : 总收入	q : 死亡率
P : 总支出	α : 工资增长率
G : 政府补贴	β : GDP 增长率
L : 人口数	γ : 离退休职工人数年增长率
W : 工资	λ : 新农保财政年补贴率
T : 年限	η : 参保职工人数年增长率
C : 缴费率	
R : 替代率	
F : 覆盖率	
r : 收益率	

1.6 本文的架构设计

本文的各个问题前后关联性强, 循序渐进, 逐步将问题引向深入。

第一部分: 前言, 主要对问题进行重新的概述, 并对下一步建模做了一定的准备工作。

第二部分: 针对问题一做出解答, 分层次建立中国城乡居民养老金收入-支出精算模型。

第三部分: 针对问题二做出解答, 建立养老金缺口预测模型, 对 2013 到 2035 年的养老金缺口进行了预测。

第四部分: 针对问题三做出解答, 建立替代率、缴费率系统仿真模型, 并运用仿真技术, 对相关政策效果做出评测。

第五部分: 针对问题四做出解答, 建立基于可调节变量的替代率、缴费率仿真模型, 其中选取制度内抚养比为可调节变量。

第六部分: 对已经建立的模型进行评价, 支出模型所存在的不足和可以改进的内容, 并对模型推广。

整篇论文的结构如下所示:

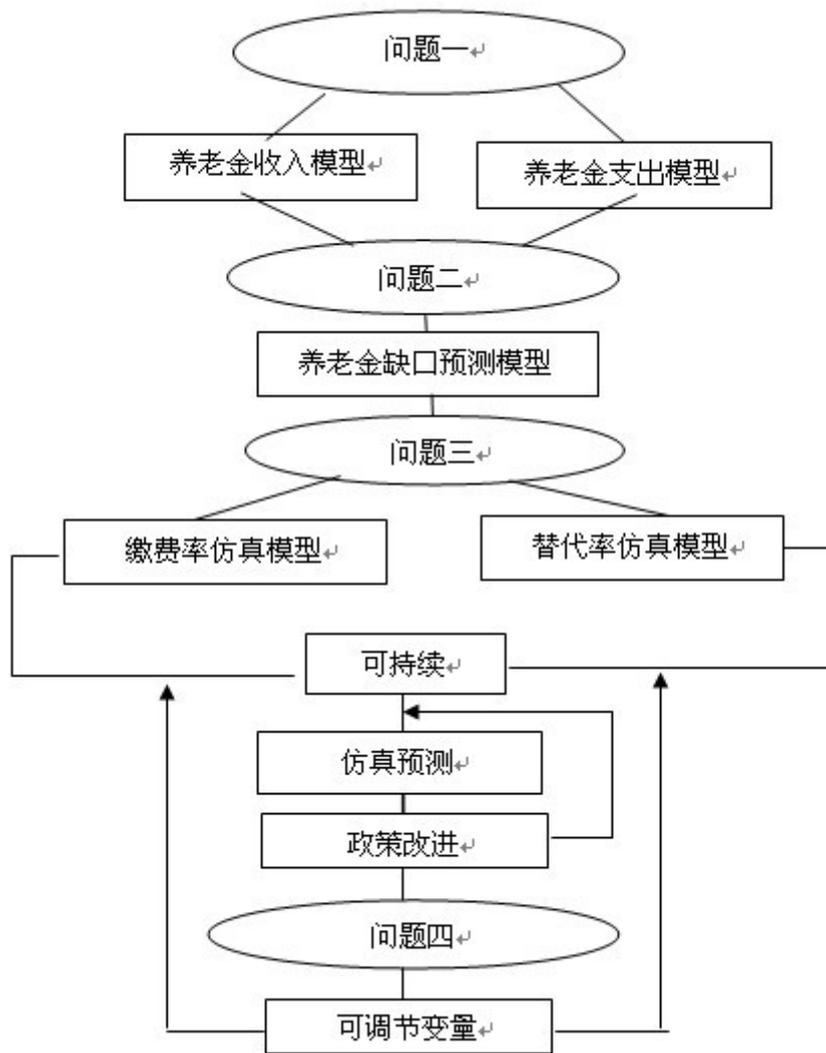


图 1.1 流程图

2 问题一的解答

2.1 问题一的分析

党的“十八大”报告的第七部分“在改善民生和创新社会管理中加强社会建设”指出，“要坚持全覆盖、保基本、多层次、可持续方针，以增强公平性、适应流动性、保证可持续性为重点”。在基本养老保险制度的发展过程中，“全覆盖”与“保基本”方面都取得了一定的成就，然而随着人口趋于老龄化，我们必须建立并完善多层次养老保险体系来解决老龄化带来的养老需求和财政负担之间的矛盾，从而降低养老金“缺口”进一步保证我国养老保险体系的可持续性。

在问题一中，首先，在多层次的养老保险体系中，基本养老保险是核心，由国家立法在全国统一强制实施，适用于城镇各类职工。第二层次是企业年金基金，

是指根据已发制定的企业年金计划筹集的资金及其投资运营收益形成的企业补充养老保险基金。第三层次是职工个人储蓄性养老保险,是职工自愿参加、自愿选择经办机构的一种补充保险形式。然而,目前我国个人储蓄性养老保险的发展尚处于起步阶段,水平很低,只有较少的劳动者个人通过购买商业保险公司的养老保险产品或通过自愿选择社会保险经办机构进行其他形式的个人养老储蓄,故在针对职工个人储蓄性养老保险建立宏观模型时,随意性较大,变量不好量化,数据不好收集,所以我们没有将这一部分考虑在内。

其次,问题一要求建立的是全国城乡居民养老金收入、支出模型,所以不仅要考虑到城镇居民,而且还要考虑到农村居民,针对农村居民,我国目前实施新型农村社会养老保险制度,故在此制度的前提下,我们建立新型农村社会养老保险基金收入、支出精算模型。

然后,针对全国城乡居民养老金支出模型,根据我国现行的养老保险政策,参加了社会养老保险的人员分为三类:“老人”、“中人”和“新人”,故分别建立三类别的养老保险支出模型。

最后,为鼓励城乡居民参保,我国提倡“多缴多得,长缴多得”,即缴费年限越长、缴费金额越高,领取的养老金就越多,这一点在模型中得以实现。

2.2 模型的建立

本文把全国城乡居民养老金收入、支出宏观模型界定为:由特定社会、经济发展水平决定,受多种因素影响,国家和社会依据相应的法律和法规,通过一定的制度安排向城乡居民提供或收取一定养老金数额。在构建模型时,在之前假设前提上再对模型进行具体假设:

- 假设 1: 基本养老保险费于每年年初一次性缴费和拨付;
- 假设 2: 在目标期间内,新型农村社会养老保险基金运营的收入来源为政府财政补贴和个人缴费收入,不考虑集体补贴、社会赠予等其他情况;
- 假设 3: 城乡居民具有相同的参保概率;
- 假设 4: 居民平均预期寿命、农民生存极限年龄相同;
- 假设 5: 城乡居民从开始缴费到结束缴费期间,保持每年连续缴费,中间无间断,并且参保农民在参保期间选择同一标准的缴费档次;
- 假设 6: 政府财政对参保农民的补贴金额随着经济发展水平的变化同步调整,两者呈正相关关系;
- 假设 7: 不考虑城乡居民在目标期间内有退保情况;
- 假设 8: 男女就业与退休年龄相同,开始工作就参加国家社会养老保险。

2.2.1 我国城乡基本养老金动态收入宏观数学模型

我国城乡基本养老金动态收入包括城镇职工基本养老金收入、新型农村社会养老保险基金收入和企业年金收入三部分^[1],即:

$$S_j = S_j^1 + S_j^2 + S_j^3 \quad (2.1)$$

其中 S_j, S_j^1, S_j^2, S_j^3 分别表示 j 年我国城乡基本养老保险金动态收入、城镇职工基本养老保险金收入、企业年金收入和新型农村社会养老保险基金收入。

(1) 城镇职工基本养老保险金收入宏观模型

城镇职工基本养老保险金包括社会统筹供给和个人账户：

$$S_j^1 = ST_j + SG_j \quad (2.2)$$

其中 ST_j, SG_j 分别表示 j 年社会统筹供给和个人账户。

① 社会统筹供给包括基础养老金和政府补贴：

$$ST_j = SE_j + G_j \quad (2.3)$$

其中，企业缴费： $SE_j = C_j^1 \times L_{j-1}^1 \times (1 + \eta) \times F_{j-1}^1 \times \overline{W}_j^1$

$$L_j^1 = \sum_{k=b}^m L_{k,j}^1 = \sum_{k=b}^{m-1} L_{k,j}^1 (1 - q_{k-1,j-1})$$

$$\overline{W}_j^1 = \overline{W}_a \times (1 + \alpha)^{j-a}$$

其中 SE_j 表示 j 年企业缴费收入， G_j 表示 j 年政府补贴收入， C_j^1 表示 j 年社会统筹缴费率， L_j^1 表示 j 年在职人口数， a 表示基年， F_j^1 表示 j 年基本养老金保险覆盖率， \overline{W}_j^1 表示 j 年职工平均工资， \overline{W}_a 表示职工基年平均工资。

$$\text{政府补贴为：} G_j = \delta \times GDP_a \times (1 + \beta)^{j-a} \quad (2.4)$$

其中 δ 表示财政补贴占 GDP 比， GDP_a 表示基年 GDP 。

将公式 (2.3) 和 (2.4) 带入公式 (2.2) 中，得：

$$ST_j = C_j^1 \times \left[\sum_{k=b_0}^{m-1} L_{k,j}^1 (1 - q_{k-1,j-1}) \right] \times (1 + \eta) \times F_{j-1}^1 \times \overline{W}_a \times (1 + \alpha)^{j-a} + \delta \times GDP_a \times (1 + \beta)^{j-a} \quad (2.5)$$

其中 b_0 表示初次就业平均年龄， m 表示职工离退休年龄， $L_{k,j}^1$ 表示 j 年 k 岁在职人口数， $q_{k-1,j-1}$ 表示 $k-1$ 岁的在职人口在 $j-1$ 年的死亡率。

② 个人账户包括个人缴费收入和累计投资收益：

$$SG_j = SP_j + SI_j \quad (2.6)$$

其中 SP_j 表示 j 年个人缴费收入， SI_j 表示 j 年个人账户累计额投资收益。

$$\text{个人缴费收入: } SP_j = C_j^* \times L_{j-1} \times F_{j-1} \times (1+\eta) \times \overline{W}_j^1 \quad (2.7)$$

其中 C_j^* 表示 j 年个人账户缴费率。

累计投资收益:

$$SI_j = \left[\sum_{i=1}^{T^y} SP_i \times (1+r)^{T^y-i} + \sum_{i=1}^{T^m} SP_i \times (1+r)^{T^m-i} \right] \times r$$

其中， T^y 表示“新人”缴费年限， T^m 表示“中人”缴费年限。

将公式 (2.6) 和 (2.7) 带入式 (1.9) 得:

$$SG_j = C_j^* \times L_{j-1} \times F_{j-1} \times (1+\eta) \times \overline{W}_j^1 + \left[\sum_{i=1}^{T^y} SP_i \times (1+r)^{T^y-i} + \sum_{i=1}^{T^m} SP_i \times (1+r)^{T^m-i} \right] \times r \quad (2.8)$$

将公式 (2.5) 和式 (2.8) 带入式 (2.2) 即可得到城镇职工基本保险金收入模型:

$$\begin{aligned} S_j^1 &= ST_j + SG_j \\ &= C_j^1 \times \left[\sum_{k=b_0}^{m-1} L_{k,j}^1 (1-q_{k-1,j-1}) \right] \times (1+\eta) \times F_{j-1}^1 \times \overline{W}_a \times (1+\alpha)^{j-a} \\ &\quad + \delta \times GDP_0 \times (1+\beta)^{j-a} + C_j^* \times L_{j-1} \times F_{j-1} \times (1+\eta) \times \overline{W}_j^1 \\ &\quad + \left[\sum_{i=1}^{T^y} SP_i \times (1+r)^{T^y-i} + \sum_{i=1}^{T^m} SP_i \times (1+r)^{T^m-i} \right] \times r \end{aligned} \quad (2.9)$$

(2) 企业年金收入精算模型

我国企业年金采用的是固定缴费方式，即由企业设立，为职工建立个人账户，并按个人账户积累额支付退休金的一种退休金计划^[2]。缴费额:

$$\begin{aligned} A_{j,n} &= C_j^2 \times W_{j,n}^2 \\ S_j^2 &= \sum_n \left\{ \left[\sum_{i=1}^{T^1} A_{i,n} \times (1+r^2)^{T^1-i} \right] \times r^2 + A_{j,n} \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

其中 $A_{j,n}$ 表示第 n 个人在 j 年企业年金缴费， $W_{j,n}^2$ 表示第 n 个人在 j 年企业工资， r^2 表示 j 年企业年金投资收益率。

(3) 新型农村社会养老保险基金收入精算模型

根据新农保现行政策，财政补贴会随着个人缴费收入进入参保农民的个人账户，共同形成个人账户的积累。故构建如下新型农村社会养老保险基金收入精算模型^[3]。

$$S_j^3 = \sum_{k=n_1}^{n_2-1} L_{k,j}^3 \times F_j^3 \times W_{j-1} \times (C_j^3 + \lambda) \quad (2.11)$$

其中 $L_{k,j}^3$ 表示 j 年 k 岁农民人数， F_j^3 表示 j 年新农保覆盖率， n_1 表示农民开始缴费的平均年龄， n_2 表示农民停止缴费的平均年龄， W_{j-1} 表示 $j-1$ 年新型农村社会养老保险缴费基数， C_j^3 表示参保农民年个人缴费率。

(4) 我国城乡基本养老保险金动态收入宏观模型

$$\begin{aligned} S_j &= S_j^1 + S_j^2 + S_j^3 \\ &= C_j^1 \times \left[\sum_{k=b_0}^{m-1} L_{k,j}^1 (1 - q_{k-1,j-1}) \right] \times (1 + \eta) \times F_{j-1}^1 \times \overline{W}_a \times (1 + \alpha)^{j-a} \\ &\quad + \delta \times GDP_0 \times (1 + \beta)^{j-a} + C_j^* \times L_{j-1} \times F_{j-1} \times (1 + \eta) \times \overline{W}_j^1 \\ &\quad + \left[\sum_{i=1}^{T^y} SP_i \times (1 + r)^{T^y-i} + \sum_{i=1}^{T^m} SP_i \times (1 + r)^{T^m-i} \right] \times r \\ &\quad + \sum_n \left\{ \left[\sum_{i=1}^{T^1} A_{i,n} \times (1 + r^2)^{T^1-i} \right] \times r^2 + A_{j,n} \right\} + \sum_{k=n_2}^{n_2-1} L_{k,j}^3 \times F_j^3 \times W_{j-1} \times (C_j^3 + \lambda) \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.2.2 我国城乡基本养老保险金动态支出宏观数学模型

我国城乡基本养老保险金动态支出包括城镇职工基本养老保险金支出、企业年金支出和新型农村社会养老保险基金支出三部分，即：

$$P_j = P_j^1 + P_j^2 + P_j^3 \quad (2.13)$$

其中 P_j, P_j^1, P_j^2, P_j^3 分别表示我国城乡 j 年基本养老保险金支出、城镇职工基本养老保险金支出、企业年金支出和新型农村社会养老保险基金支出。

(1) 城镇职工基本养老保险金支出宏观模型

$$P_j^1 = P_j^o + P_j^m + P_j^y \quad (2.14)$$

其中， P_j^o 表示 j 年“老人”养老保险金支出， P_j^m 表示 j 年“中人”养老保险金支出， P_j^y 表示 j 年“新人”养老保险金支出。

① “老人” 养老金支出模型

$$P_j^o = \sum_{j-1998+m}^{l^1} R^o \times \overline{W}_j^1 \times L_j^o \quad (2.15)$$

$$L_j^o = L_a(1-q^o)^{j-a}, \quad \overline{W}_j = \overline{W}_a \times (1+\alpha)^{j-a}$$

其中, R^o 表示为 j 年“老人”替代率, l^1 表示职工期望寿命, L_j^o 表示 j 年“老人”离退休人数, \overline{W}_a 表示基年平均工资, L_a 表示基年离退休人数, q^o 表示“老人”死亡率。

② “中人” 养老金支出模型^[4]

$$P_j^m = PT_j^m + PG_j^m + PE_j^m \quad (2.16)$$

$$j \text{ 年“中人”的社会统筹养老金支出 } PT_j^m = R_j^m \times L_j^m \times \overline{W}_j \quad (2.17)$$

其中 $L_j^m = L_{j-1}^m \times F_{j-1}^1 \times (1+r) \times (1+\gamma)$

j 年“中人”的个人账户养老金支出:

$$PG_j^m = \frac{\sum_{i=1}^{T^y} SG_i}{l^1 - m} \quad (2.18)$$

j 年“中人”的过渡性养老金支出:

$$PE_j^m = \sum_{x=m}^{l^1} \left\{ L_{j-1}^m \times \overline{W}_{j-(x-m-1)} \times [x - (j-1997) - b_0] \times \theta \right\} \quad (2.19)$$

则将式 (2.17) —— (2.19) 代入 (2.16), 得

$$P_j^m = R_j^m \times L_j^m \times \overline{W}_j + \frac{\sum_{i=1}^{T^y} SG_i}{l^1 - m} + \sum_{x=m}^{l^1} \left\{ L_{j-1}^m \times \overline{W}_{j-(x-m-1)} \times [x - (j-1997) - b_0] \times \theta \right\} \quad (2.20)$$

其中 R_j^m 表示 j 年“中人”替代率, L_j^m 表示 j 年“中人”退休人数, m 表示职工离退休年龄, x 表示 j 年 x 岁退休“中人”, $x - (j-1997) - b_0$ 为视同缴费年限, θ 表示折算系数, 一般取 1.2%。

③ “新人” 养老金支出模型

$$P_j^y = R_j^y \times L_j^y \times \overline{W}_j \times + \frac{\sum_{i=1}^{T^m} SG_i}{10} \quad (2.21)$$

$$L_j^y = L_{j-1}^y \times F_{j-1}^1 \times (1+r) \times (1+\gamma)$$

其中, R_j^y 表示 j 年“新人”替代率, L_j^y 表示 j 年“新人”退休人数。

将式 (2.15), (2.16) 和 (2.21) 代入式 (2.14) 得:

$$\begin{aligned} P_j^1 = & \sum_{j=1998+m}^{l^1} R^o \times \overline{W}_j^1 \times L_j^o \\ & + R_j^m \times L_j^m \times \overline{W}_j + \frac{\sum_{i=1}^{T^y} SG_i}{l^1 - m} + \sum_{x=m}^{l^1} \left\{ L_{j-1}^m \times \overline{W}_{j-(x-m-1)} \times [x - (j-1997) - b_0] \times \theta \right\} \\ & + R_j^y \times L_j^y \times \overline{W}_j \times + \frac{\sum_{i=1}^{T^m} SG_i}{10} \end{aligned} \quad (2.22)$$

(2) 企业年金动态支出宏观数学模型^[5]

$$P_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{T^2} S_i^2}{l^1 - m} \quad (2.23)$$

其中 P_j^2 表示 j 年企业年金支出, l^1 表示平均寿命, T^2 表示企业年金缴费年限。

(3) 新型农村社会养老保险基金收入精算模型

$$P_j^3 = PT_j^3 + PG_j \quad (2.24)$$

其中 P_j^3 表示 j 年新型农村社会养老保险基金支出, PT_j^3 表示 j 年基础养老金支出, PG_j 表示 j 年个人账户养老金支出。

① 基础养老金支出

$$PT_j^3 = \sum_{k=c^0}^{l^3} L_{k,j}^3 \times M_j \quad (2.25)$$

其中 l^3 表示农民的极限年龄, c^0 表示农民开始领取养老金的年龄, M_j 表示 j 年

基础养老金发放标准。

②个人账户养老金支出：

$$PG_j = \sum_{j=c^0}^{l^3-1} L_{k,j}^3 \times F_j^3 \times \frac{SN_j}{T^3} \quad (2.26)$$

个人账户养老金积累额： $SN_j = \sum_{z=1}^{n_2-n_1} W_{j-z} \times (C_j^3 + \lambda) \times (1+r)^{z-1}$

其中 l^3 表示农民的极限年龄， T^3 表示新农保个人账户养老金计发年限。

将式 (2.25) 和 (2.26) 代入式 (2.24) 得：

$$P_j^3 = \sum_{k=c^0}^{l^3} L_{k,j}^3 \times M_j + \sum_{j=c^0}^{l^3-1} L_{k,j}^3 \times F_j^3 \times \frac{SN_j}{T^3} \quad (2.27)$$

(4) 我国城乡基本养老保险金动态支出宏观模型

$$\begin{aligned} P_j &= P_j^1 + P_j^2 + P_j^3 \\ &= \sum_{j=1998+m}^{l^1} R^o \times \overline{W}_j^1 \times L_j^o + R_j^m \times L_j^m \times \overline{W}_j + \frac{\sum_{i=1}^{T^y} SG_i}{l^1 - m} \\ &\quad + \sum_{x=m}^{l^1} \left\{ L_{j-1}^m \times \overline{W}_{j-(x-m-1)} \times [x - (j-1997) - b_0] \times \theta \right\} \\ &\quad + R_j^y \times L_j^y \times \overline{W}_j \times + \frac{\sum_{i=1}^{T^m} SG_i}{10} + \frac{\sum_{i=1}^{T^2} S_i^2}{l^1 - m} \\ &\quad + \sum_{k=c^0}^{l^3} L_{k,j}^3 \times M_j + \sum_{j=c^0}^{l^3-1} L_{k,j}^3 \times F_j^3 \times \frac{SN_j}{T^3} \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.3 模型分析

“多缴多得，长缴多得”即指缴费额度和缴费年限的增加均会提高养老金的支付水平。由上述的基本养老金支出模型，可以看出：对于城镇退休职工中的“老人”、“中人”、“新人”，新农保覆盖参保人群以及企业年金的养老金支付，均随着平均工资水平 \overline{W} 的提高而提高，充分体现了“多缴多得”；而随着缴费年限 T^1 和 T^2 的增加，也使得养老金支出增加，从而体现“长缴多得”。因此，本文建立的我国城乡基本养老保险金动态支出宏观模型能够很好地体现“多缴多得，长缴多得”的国家鼓励政策，为我国的养老金政策制定和实施提供一定的参考。

3 问题二的解答

3.1 问题二的分析

目前人们对我国社会养老保险基金是否存在缺口问题进行争议的主要原因是由于对“缺口”存在形态的理解不同所致。本文将养老金收支缺口分为“当期缺口”和“未来缺口”，“整体性缺口”和“结构性缺口”四种。“当期缺口”是指当年养老基金的各项收入之和减去支出之和出现收不抵支的一种状况。“未来缺口”是指由于种种原因未来一定时期内可能出现的养老金收支差额。“整体性缺口”是指在一定时期内在一个统一的社会养老保险系统内出现的养老金全面收不抵支的情况。“结构性缺口”主要是指养老基金在国家进行制度转轨过程中形成的隐性和显性债务以及由于地区经济发展不平衡而产生的结构性养老金收支缺口。

本题要求对今年至 2035 年的我国养老金缺口进行精算预测。首先利用 logistic 人口预测模型对我国未来 22 年的城镇参保在职人口，进而对城镇企业职工的人口情况进行预测；然后依据问题一建立的城镇企业职工养老保险的收支模型，在替代率不同的情况下对未来 22 年的城镇企业职工养老金收支进行精算预测；最后根据养老金收支情况，测算出养老金未来 22 年的缺口。

3.2 模型的建立

3.2.1 logistic 人口预测模型

logistic 预测模型的起源最早可以追溯到 18 世纪末英国人口学家马尔萨斯(Malthus)所创建的人口指数增长模型，其在对一百多年的人口统计资料进行研究后认为，长达一个世界的人口增长过程中，人口的相对增长率是以常数的状态存在，于是建立了著名的马氏人口预测模型^[2]，由于此模型将人口的相对增长率看成是常数，没有考虑到自然资源对人口数量的限制，故 1840 年，比利时数学家费尔哈斯(P. F. Verhulst)考虑到地域环境对人口数量的限制作用，于是对 Malthus 人口预测模型进行修正^[6]：设环境资源能承受的最大人口数为 N ，初期人口较少时的自然增长率为 ω ， t 时刻某地区的人口总数为 $Y(t)$ ，则随着 $Y(t)$ 的增加 ω 逐渐下降，人口的相对增长率就可以表示为 $\omega(1 - N/Y)$ ，将其带入 Malthus 模型中，就变形为：

$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = \omega \times \left(1 - \frac{Y}{N}\right) \times t \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

(3.1)式称为 logistic 人口预测模型，在人口规模较大时，认为 $Y(t)$ 连续可微，对上式进行微分求解得：

$$Y(t) = \frac{N}{1 + \left(\frac{N}{Y_0} - 1\right) \times e^{-\omega t}} \quad (3.2)$$

3.2.2 养老金缺口预测模型建立

依据问题一的支出模型，首先，企业年金和个人储蓄性养老保险，都是个人自愿缴纳，盈亏自负，数据难以收集且对缺口不造成影响，故不考虑在内；其次，在国内，由于新农保制度还处于试点和探索阶段，制度尚未完善，基础数据还非常缺乏，故忽略该部分；最后，在 2013 至 2035 年间，新人仍处在 44 至 56 岁的年龄段，(假设在基年 2011 年就业开始年龄为 20 至 32 岁)故新人仍为在职员工，没有退休人数；其次，由于个人账户都采用封闭管理模式，理论上不存在缺口，故在建立模型时都不考虑。

j 年养老金缺口 Q_j 的表达式为：

$$\begin{aligned} Q_j &= P_j - ST_j \\ &= P_j^o - PT_j^m - PE_j^m - ST_j \\ &= \sum_{j=1998+m}^j R^o \times \overline{W}_j^1 \times L_j^o - R_j^m \times L_j^m \times \overline{W}_j - \sum_{x=m}^j \left\{ L_{j-1}^m \times \overline{W}_{j-(x-m-1)} \times [x - (j-1997) - b_0] \times \theta \right\} \\ &\quad - C_j^1 \times \left[\sum_{k=b_0}^{m-1} L_{k,j}^1 (1 - q_{k-1,j-1}) \right] \times (1 + \eta) \times F_{j-1}^1 \times \overline{W}_a \times (1 + \alpha)^{j-a} \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.3 实证分析

3.3.1 数据来源

由于所有变量最新数据为 2011 年度数据，故本文选取基年为 2011 年。

在用 logistic 模型中进行预测时，模型公式中有 2 个参数：最大人口数 N 和人口增长率 ω ，经计算得^[7]：

$$\begin{cases} \omega_L = 0.0968 \\ N_L = 533833608 \end{cases} \quad (3.4)$$

缴费率采用国发[2005]38号文件规定，缴费率为 20%，“老人”“中人”替代率经养老金替代率测算模型所得，职工平均工资增长率通过《2012 年中国统计年鉴》公布的近十年职工平均工资增长率，发现，最近 10 年我国城镇企业职工每年的工资增长率均保持在 11%以上，甚至在 2007 年高达 18.5%，均值为 14.5%。但考虑到我国对经济进行宏观调控，要求保持经济稳步发展，防止过快

增长带来通胀问题。结合 2012 年国家实现 GDP 增长 7.5% 的要求目标，因此本文在确定工资增长率时还是采用分段进行的方法，每隔 10 年变化一次：前 10 年为 11%，2021 至 2030 年为 8%，2031 至 2035 年工资增长率为 6% 来测算工资水平^[8]。就业年龄假设均为 20 岁，退休年龄取男女退休年龄平均而得到，即为 57 岁。

由于在 1998 年“老人”都已退休，故在 2011 年其最少年龄为 70 岁，假设“中人”在 1998 年开始就业，则最小年龄为 20 岁，1998 年“中人”年龄段为 20 至 57 岁，在 2011 年为 33 至 69 岁，则“在职中人”为 33 至 56 岁，“退休中人”为 57 至 69 岁，故本文所选取“老人”“退休中人”数根据《中国人口与就业统计年鉴》分年龄段结构占比计算所得，2013 年至 2035 年健在“老人”数依据近几年分年龄段死亡率预测得出。

3.3.2 实证结果

经计算得出 2013 年至 2035 年“老人”“中人”数，并绘出变化趋势图，如下图 3.1 所示：

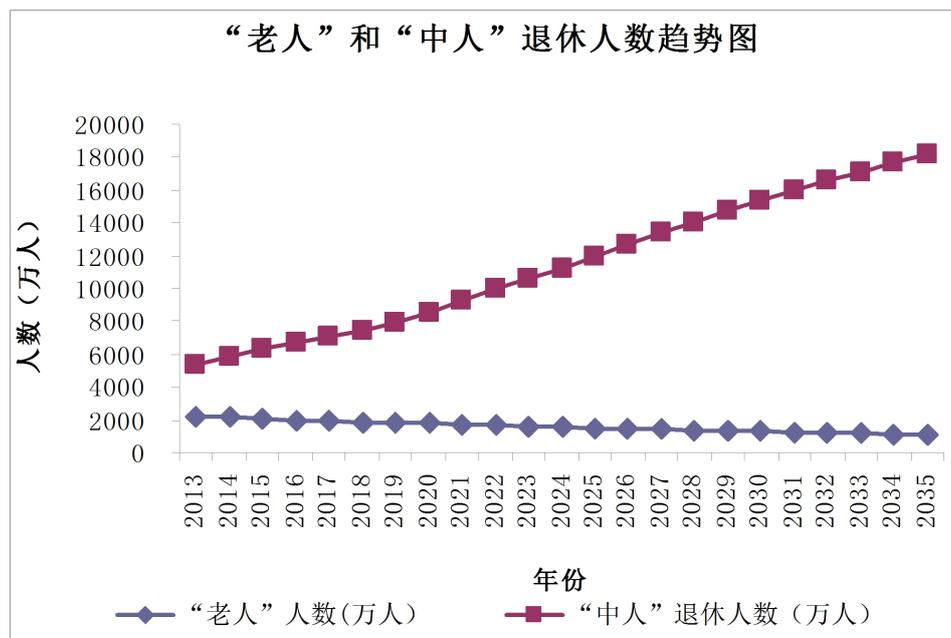


图 3.1 “老人”和“中人”退休人数趋势图

根据式 (3.3)，并由数据可预测出 2013 年至 2035 年每年我国养老金缺口数额，如下表 3.1 所示：

表 3.1 养老金缺口预测数据值（万亿）

年限	基金征缴收入	老人支出	中人退休支出	过渡性养老金	缺口
2013	2.050	0.661	1.623	11.818	12.053
2014	2.320	0.711	0.711	13.818	12.920
2015	2.623	0.765	0.765	15.891	14.799
2016	2.960	0.824	0.824	17.904	16.591
2017	3.336	0.886	0.886	20.166	18.602
2018	3.756	0.954	0.954	22.356	20.507
2019	4.224	1.026	1.026	25.480	23.308
2020	4.745	1.104	1.104	29.155	26.618
2021	4.049	0.903	0.903	25.448	23.206
2022	4.417	0.946	0.946	27.941	25.415
2023	4.815	0.990	0.990	30.430	27.595
2024	5.245	1.037	1.037	32.778	29.607
2025	5.708	1.085	1.085	35.531	31.993
2026	6.209	1.136	1.136	38.019	34.082
2027	6.749	1.190	1.190	40.549	36.179
2028	7.332	1.245	1.245	42.719	37.877
2029	7.962	1.304	1.304	44.624	39.270
2030	8.641	1.365	1.365	46.162	40.251
2031	6.450	0.983	0.983	32.452	27.968
2032	6.865	1.010	1.010	32.061	27.217
2033	7.305	1.038	1.038	31.234	26.006
2034	7.769	1.067	1.067	29.821	24.186
2035	8.261	1.096	1.096	27.919	21.851

由表知，在 2030 年所预测养老金缺口值最大为 40.251 万亿元，年累计养老金缺口呈上升趋势，绘制年养老金缺口趋势图，如下图 3.2 所示：

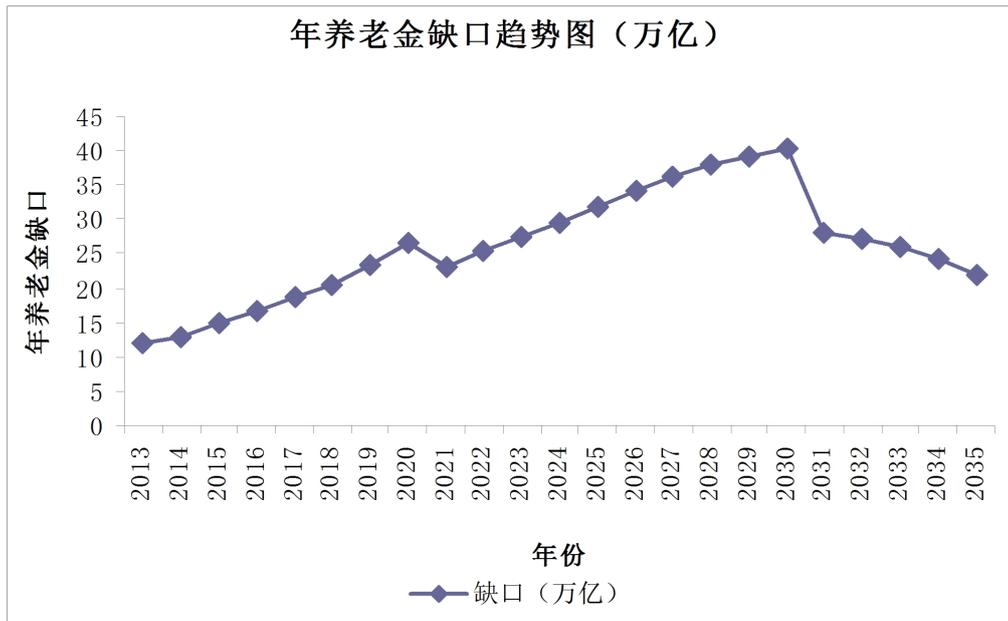


图 3.2 年养老金缺口趋势图

由图所得，经预测，在 2013 年至 2030 年每年养老金缺口逐年增加，在 2030 年养老金缺口达到最大，而后逐年减少至 21.85 万亿元。且在 2013 年，“在职中人”最小年龄为 35 岁，而在 2035 年，“在职中人”的最小年龄为 57 岁，故在 2035 年所有“中人”全部退休，故在 2035 年年累计养老金缺口为最大值。

3.3.3 结果分析

由上述结果所知，在目标区间内，养老金缺口在 2030 年达到顶峰，并且总体呈现上升趋势，表明在未来，我国养老金缺口压力剧增。导致我国城镇企业职工养老保险基金缺口的形成原因主要来自于三个方面：一是上世纪 90 年代，我国养老保险体系进行改革之时，对“中人”和“老人”的未来养老金进行承诺而产生的隐性债务；二是社会统筹账户在收不抵支时对个人账户挪用，个人账户逐渐沦为“空账”即“显性债务”；三是人口结构变化带来的人口老龄化加剧与适龄劳动力人口下降现象，这进一步加剧了养老金的支付压力，故短期内，我国养老金收支压力主要来源于转轨成本，中长期内，人口老龄化逐渐成为导致养老金收支缺口的最主要因素。本文所建模型体现了在短期内我国养老金收支压力主要来源于转轨成本。

由模型预测数据所知，在 2030 年，年养老金收支缺口最大，也就是我国城乡居民养老保险收支矛盾最尖锐的一年，在 2030 年“退休中人”人数达到最大，此时过渡性养老债务最大。

3.3.4 模型改进

中共十八大报告首次提出了居民收入倍增目标：即到 2020 年，要实现国内生产总值和城乡居民人均收入比 2020 年翻一番。即当基年选取为 2011 年时，人

均收入满足： $\bar{W}_t \times (1 + \alpha^*)^{10} = 2 \times \bar{W}_t$ ，其中 $t = 2011$ ，求解得， $\alpha^* = 7.06\%$ ，故在模型中工资增长率取 7.06% ，则模型改写为：

$$\begin{aligned}
 Q_{2020} &= P_{2020} - ST_{2020} \\
 &= P_{2020}^o - PT_{2020}^m - PE_{2020}^m - ST_{2020} \\
 &= \sum_{42}^l R^o \times \bar{W}_{2020}^1 \times L_{2020}^o - R_{2020}^m \times L_{2020}^m \times \bar{W}_{2020} - \sum_{42}^l \left\{ L_{2019}^m \times \bar{W}_{2020-(x-m-1)} \times (x-23) \times 1.2\% \right\} \\
 &\quad - C_j^1 \times \left[\sum_{k=b_0}^{m-1} L_{k,2020}^1 (1 - q_{k-1,2019}) \right] \times (1 + \eta) \times F_{2019}^1 \times \bar{W}_{2011} \times (1 + 7.06\%)^{j-a}
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

4 问题三的解答

4.1 问题的分析

问题三要求我们先分析、比较各国养老保险的不同模式，并结合分析比较的结果，建立适用于中国实情的数学模型，并在养老保险体系可持续发展的前提下用仿真手段估计出缴费率、替代率的合理区间。此外，还需提出在过渡期内的政策建议，并用仿真预测手段进行评价。

基于问题三的把握，本文对典型国家的养老保险模式进行分析后，在估计缴费率、替代率区间时，对养老基金收支结余施加了“ ≥ 0 ”的约束，以体现养老保险的可持续性，基于个人支出基金收支平衡模型估计出缴费率的区间，在此基础上，建立个人替代率的概念模型，用于估计替代率的区间。

对于政策评价而言，一些政策变量会因为政策变动而产生的新的指标，因此该政策变量指标的变动必然会造成养老金结余的改变，那么就可以利用养老金平均结余的改变来评价该政策的效果。

4.2 国外养老保险制度分析比较

作为一项重要的社会制度安排，养老保险制度一直是理论界关注的热点。20世纪70年代以来，在人口老龄化的挑战下，以代际转换和现收现付为主要特征的传统公共养老保险制度给各国政府财政带来了巨大压力，制度的不可持续性凸显。于是，养老保险制度的改革在世界各国风起云涌，至今仍方兴未艾。与此同时，各国养老保险制度改革的模式选择及其经济效应更成为理论界争论的焦点。有鉴于此，对具代表性的国家养老保险制度改革进行比较分析有助于我们深刻了解各个养老保险金体制在不同政治、经济背景下的实用性。^[9]

世界各国养老保险模式主要分三种：福利国家模式、自保公助模式、强制储蓄模式。^[10]因此，我们分别选取不同养老保险制度模式下的代表性国家，列出各国养老基金的层次、筹资模式等，进行对比分析^[11]，如下表4.1所示：

表 4.1 典型国家主要的养老基金模式

国家 制度	福利国家模式		自保公助模式		强制储蓄模式	
	英国	瑞典	德国	美国	智利	新加坡
三大支柱	国家基本养老金	国民年金	国家强制性公共年金系统	公共养老保险	基本养老金	中央公积金
	各种与收入相关联的养老金计划	收入关联养老金	职业年金	雇主补充养老计划	强制性个人储蓄基金积累制度	
	个人自愿养老储蓄	职业年金制度	商业年金制度	私人储蓄养老计划	个人自愿储蓄	
筹资模式	现收现付	现收现付	现收现付	完全积累	部分积累	现收现付
养老金缴费率	参加“协议退出”计划和个人储蓄养老金计划，可获国民保险缴费汇扣	缴费率统一调整为18.5%，增加雇员缴费责任，其中16%计入名义帐户，2.5%计入强制个人账户	建立强制私人补充保险，费率从0.5%逐年增加到2.5%，可获财政补贴	用于基本养老金筹资的社会保障税率不断调整	取消最低保障制度缴款，对强制个人账户由个人承担所有缴款并重新设定缴费率	雇主缴费部分调低为13%，缴费工资上限也调低
退休年龄	女性退休年龄提高至65岁	提高至61岁	提高至65岁	男女均增至67岁	----- -	推迟到67岁
提前或延迟退休规定	提前退休扣减退休金	延迟退休增加养老金数额	提前退休扣减退休金	-----	-----	延迟退休给予就业入息补助
给付标准	由按收入最高20年改为全部工作期的平均收入	“名义资产”根据名义回报率计算的回报、“名义资产”围成退休年金的计算公式、退休给付指数化公式	引进人口因素，降低标准，削减每月领取的养老金数额，延长养老金发放总年份	取消养老金收入免税规定	根据个人账户资产额定	根据公积金账户存款余额定

在典型国家养老保险的改革历程上，各国家在筹资环节上，一般采取的是调整缴费率、扩大制度覆盖范围等措施，且筹资模式向筹费确定性转变，并倾向于采取催收的方式筹集资金。^[12]改革过程中有很多值得我国借鉴的地方，因此，下面对各个国家养老保险金模式进行评价，如表 4.2 所示：

表 4.2 典型国家主要的养老模式评价

国家 评价	福利国家模式		自保公助模式		强制储蓄模式	
	英国	瑞典	德国	美国	智利	新加坡
优点	低收入者待遇有所改善 可持续 稳健性强	低收入者待遇有所改善 可持续 稳健性强	政府负担减轻	短期具有 可持续 稳健性强	可持续 个人负担 减轻	政府无负担 可持续 稳健性强
缺点	短期内加重国家制度负担	政府负担加重	不具有可持续性 抗风险能力弱	层次单一 加重个人负担	抗风险能力弱	未考虑低收入者

4.3 缴费率及替代率的系统仿真模型

4.3.1 模型建立

(1) 缴费率模型----基于个人支出基金收支平衡模型

利用个人支出基金的收入=支出原理，^[13]得到如下公式：

$$Y(1+\alpha)^T \times T\% + \frac{C^1(1+r)[(1+r)^T - 1]}{r} = \frac{(C^1 + C^2)(1+r)[(1+r)^T - (1+\alpha)^T]}{r - \alpha}$$

(4.1)

其中， Y 为个人账户的计发年数； T 为缴费年限，等同工作年限； C^1 为基础养老金缴费率； C^2 为个人账户养老金缴费率。

(2) 替代率——基于个人替代率定义模型

① 个人的基础养老金账户支出模型

$$ST = \frac{\overline{W}_a(1+\alpha)^{T-1}(1+I)}{2} \times T \times b\% \quad (4.2)$$

其中， \overline{W}_a 为个人的初始工资； I 为平均缴费工资指数； b 为养老金待遇增长的系数，即缴费每满一年发给 $b\%$ 。

② 个人的个人账户支出模型

$$SG = C^2 \overline{W}_a \frac{(1+\alpha)^T - (1+r)^T}{Y(\alpha-r)} \quad (4.3)$$

③ 个人替代率定义模型

$$R = \frac{ST + SG}{\overline{W}_a(1+\alpha)^{T-1}} = \frac{1+I}{2} \times T \times b\% + C^2 \frac{(1+\alpha)^T - (1+r)^T}{Y(\alpha-r)(1+r)^{T-1}} \quad (4.4)$$

(3) 个人养老金收支结余的约束模型

① 个人养老金收入模型

$$S = C^1 \sum_{n=0}^T \overline{W}_a(1+\alpha)^n + C^2 \sum_{n=0}^T \overline{W}_a(1+\alpha)^n(1+r)^{T-n} \quad (4.5)$$

② 个人养老金收入模型

$$\begin{aligned} P &= LE(ST + SG) \\ &= LE \left[\frac{\overline{W}_a(1+\alpha)^{T-1}(1+I)}{2} \times T \times b\% + C^2 \overline{W}_a \frac{(1+\alpha)^T - (1+r)^T}{Y(\alpha-r)} \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

其中， LE 为职工退休时的平均余命，即为领取退休养老金的年份。

③ 个人养老金收支结余的约束模型

$\Delta = S - P \geq 0$ ，即

$$\begin{aligned} \Delta &= S - P \\ &= C^1 \sum_{n=0}^T \overline{W}_a (1+\alpha)^n + C^2 \sum_{n=0}^T \overline{W}_a (1+\alpha)^n (1+r)^{T-n} - \\ &LE \left[\frac{\overline{W}_a (1+\alpha)^{T-1} (1+I)}{2} \times T \times b\% + C^2 \overline{W}_a \frac{(1+\alpha)^T - (1+r)^T}{Y(\alpha-r)} \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.3.2 实证分析

(1) 变量设定

① 固定参数

$$\alpha = 0.096$$

$$Y = 10$$

$$r = 0.03$$

$$C^1 = 0.2$$

$$b = 1$$

② 随机变量

$$(a) I \sim U(0.6, 3)$$

根据相关法规和调查研究,我国大部分地区的个人缴费基数的下限一般为上年度当地月平均工资的 60%,上限为上年度当地月平均工资的 3 倍。平均缴费工资指数是指参加养老保险社会统筹人员历年缴费工资指数的平均值,它是由参保人每年的缴费基数除以当地上年的在岗职工平均工资,得出缴费当年的缴费工资指数,如此每年计算一次,到退休时,把每年的缴费工资指数相加,然后再除以实际缴费年限得出的。

$$(b) T \sim U(15, 37)$$

缴费年限下限为 15 年;上限为 37 年,本文考虑从初始就业开始缴费,并为整数。

$$(c) LE \sim U(1, 25)$$

余命,即退休后还能存活的年限,下限为 1 年,上限为 25 年,并为整数。

③ 求解变量

个人账户缴费率: C^2

替代率: R

养老金收支结余: Δ

(2) 实证结果

根据 4.3.1 中的三个模型进行实证, 在个人养老金收支结余的约束模型成立的情况下, 用系统仿真的方法对缴费率模型、替代率模型进行实证, 得出个人缴费率 C^2 的合理区间为 $[0.058, 0.092]$, 即个人账户缴费率在 5.8%–9.2% 的范围内, 则总缴费率在 25.8%–29.2%; R 的合理区间为 $[0.410, 0.712]$, 即替代率在 41%–71.2% 的范围内, 在此范围内, 计算的养老金收支结余均为正值, 不仅不存在缺口, 反而留有结余, 符合养老保险的可持续发展。

表 4.3 缴费率及替代率的仿真结果

仿真个数	个人缴费率	替代率	相对结余
1	0.060	0.640	56.055
2	0.074	0.515	20.843
3	0.060	0.633	97.552
4	0.072	0.567	14.963
5	0.061	0.458	50.410
6	0.090	0.570	25.986
7	0.086	0.554	36.072
8	0.085	0.603	40.283
9	0.060	0.694	40.407
10	0.083	0.712	44.870
11	0.060	0.561	44.983
12	0.091	0.497	11.931
13	0.060	0.677	20.850
14	0.060	0.515	36.225
15	0.088	0.659	50.126

4.3.3 结果分析

中国共产党第十八次全国代表大会政治报告中提出了“要坚持全覆盖、保基本、多层次、可持续方针, 以增强公平性、适应流动性、保证可持续性为重点, 全面建成覆盖城乡居民的社会保障体系”。“可持续性”已经成为我国养老制度的第一命题, 在本文模型中, 可持续性体现在养老金收支平衡。通过计算机系统仿真技术, 运用 R 软件, 结合现实情况, 给定一些参数值以及设定一些随机变量分布, 得到了能够保证养老保险系统可持续性的替代率和缴费率的合理区间, 分别为 $[0.410, 0.712]$ 和 $[0.058, 0.092]$ 。在该区间内, 养老金收支不存在缺口, 实现了可持续性。

4.4 政策仿真评价模型

4.4.1 模型实现

政策的仿真评价模型是在模型（4.7）的基础上进行的，一些政策变量会因为政策变动而产生的新的指标，因此该政策变量指标的变动必然会造成养老金结余的改变，那么就可以利用养老金平均结余的改变来评价该政策的效果。本文为了方便介绍，选用相对缺口（未乘以社会平均工资）作为比较变量，若执行一项政策后，养老金平均结余变大或者说养老金平均缺口变小了，那么该项政策就可以缓解养老金缺口，值得实施和推广。

本文选取“推迟退休年龄”、“增加养老金计发年数”、“提高企业缴费率”、“下降养老金替代率”四项政策进行评价，评价结果见表 4.4。

表 4.4 政策前后养老金平均缺口

变量	政策改进	政策前相对平均缺口	政策后相对平均缺口
T	退休年龄推迟 5 年	24.22	20.3
Y	计发年数增加 5 年	24.22	15.43
C1	企业缴费率增加 5%	24.22	21.56
R	替代率下降 5%	24.22	19.74

4.4.2 结果分析

根据表 4.4 政策前后养老金缺口数据，可以得知这四项政策分别进行政策改进后，政策后的相对平均缺口均比政策前相对平均缺口有所下降，因此这四项政策的改进均可以缓解养老金缺口问题，实现平稳过渡。

（1）“退休年龄推迟 5 年”

对于该项政策，本文将这项政策纳入缴费年限考虑，推迟 5 年退休相当于缴费年限就会增加 5 年，因此在其他变量保持不变时，退休年龄的增加会使得一部分本来到退休年龄的职工延长了工作期，即晚退休，也就可以理解为当年对养老金的需求就会减少，即缓解了养老金缺口。

（2）“计发年数增加 5 年”

对于该项政策，本文考虑计发年数影响个人账户的支出，因为个人账户采取的是封闭积累制，等参保人退休后按计发年数平均计发个人账户的累计金额，因此计发年数越长，那么每年支付的养老金就越少，也就很好地缓解了养老金缺口问题。

（3）“企业缴费率提高 5%”

对于该项政策，目前企业缴费率只有 20%，并全部计入社会统筹账户，而当

年的社会统筹账户用于支付当年退休职工的养老金，若企业缴费率提高，即社会统筹账户的收入提高，也能缓解养老金缺口问题。

(4) “替代率下降 5%”

对于该项政策，替代率是指人均养老金占在职职工人均工资的比例，即替代率越高，则在养老金的支出也就越多。在 4.2 中典型国家养老模式改革时，发现很多国家倾向于降低替代率，政府的目表在于使得养老金更市场化，即参保人被收益更大的商业养老保险等吸引，从而达到政府减少养老金支出的目的。

5 问题四的解答

5.1 可调节变量综述

5.1.1 可调节变量的定义

可调节变量^[14]被定义为，系统地改变一个预测变量与一个标准变量之间关系的形态和/或强度的变量(Sharma等，1981)；或者说，影响一个独立变量或预测变量与一个因变量或标准变量之间关系的方向和/或强度的变量(Baron和Kenny，1986)。调节变量所要解释的是自变量在何种条件下会影响因变量，也就是说，当自变量与因变量的相关大小或正负方向受到其它因素的影响时，这个其它因素就是该自变量与因变量之间的调节变量。它界定了自变量和因变量之间关系的边界条件，既可以是质化形式的变量(如性别)，也可以是量化形式的变量(如奖励水平)。使用图示法表示如图5.1：

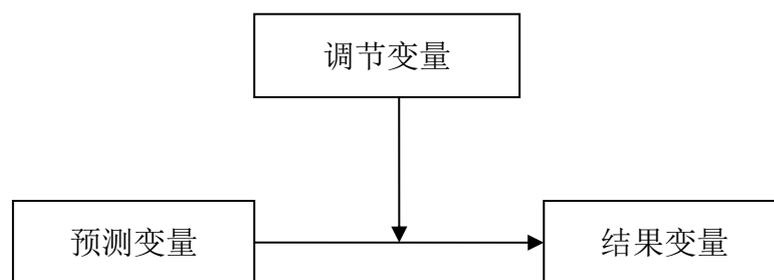


图 5.1 调节变量概念模型

在社会科学研究中，由于各种因果关系和各种变量间关系的复杂性、隐蔽性、调节变量的作用容易被忽略。但实际上，在管理学和社会行为科学理论的许多领域，调节效应一般都起着关键的作用(Aanuinis，1995)。而且，如果要评价心理学和社会学研究的成熟程度，一个很好的标准就是看我们在所研究的领域对调节变量的认识取得了多大的进展，因此，对调节变量的研究占据着科学事业的核心位置(Hall和Rosenthal，1991)。

5.1.2 可调节变量的类型

调节变量表现出的最本质特征是它与其他一些变量的交互作用，在回归方程中表现为一个交互项。因此，调节作用经常也被称为交互作用在不同的情况下，调节变量的作用以及它与其他变量的关系不尽相同，因而调节变量有不同类型。Sharma 等人(1981)根据调节变量是否与预测变量有交互作用，将调节变量分为两种基本类型。

第一种类型的调节变量与预测变量没有交互作用，但影响一个模型中预测变量与因变量之间关系的强度；第二种类型的调节变量与预测变量有交互作用，它影响预测变量与因变量之间关系的形态或方向。

根据调节变量与因变量和/或预测变量的相关关系，第二种类型的调节变量又分为纯调节变量和半调节变量调节变量的分类如图5.2所示，方框1中的变量不属于调节变量。

	与因变量/ 预测变量相关	与因变量和预 测变量不相关
与预测变量 无交互作用	1 干涉、外生、前提、 压制等预测变量	2 同质调节变量
与预测变量 有交互作用	3 单调节变量	4 纯调节变量

图 5.2 调节变量分类

(1) 同质可调节变量

图5.2方框2中为同质调节变量，它影响因果关系的强度，与预测变量没有交互作用，并且它与因变量和预测变量都没有显著的相关关系。

对个体*i*，设预测变量与因变量的函数关系为：

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i \quad (5.1)$$

式中， y_i 为因变量， x_i 为预测变量， ε_i 为随机误差项(各变量名的意义下同)。

Sharma等人(1981)解释，变量x与y之间关系的强度取决于误差项 ε 的大小，误差项越大，x与y关系的程度越小，反过来也一样。如果假定误差项是某变量z的函数，那么以该变量名为基础将观测样本分成若干组，其中各组内个体误差的方差相同，而组间的方差不同，那么一些组的预测效力会较小，而某些组将比全部样本的预测效力更高。用来将样本划分为一些同质(即同方差)的组

的这个变量 z ，必定是调节一个变量，称为同质调节变量，这类调节变量导致预测变量的效力在子样本(组)之间产生差异。由此可见，同质调节变量的作用对象是误差项 ε ，它使 x 与 y 函数关系中的误差项产生异方差性，从而对于不同样本组， x 与 y 关系的程度不同。

(2) 纯调节变量和半调节变量

纯调节变量和半调节变量影响预测变量与因变量之间关系的形态或方向。由于 x 与 y 之间关系的形式并不影响对调节变量概念的讨论(Sharma等, 1981)，为了简单，通常假定 x 与 y 为线性关系，即

$$y = a + b_1x \quad (5.2)$$

若再假定这种线性关系的形态是第三个变量的函数：

$$y = a + (b_1 + b_2z)x \quad (5.3)$$

显然，变量 z 的变化将改变方程的斜率，或者说影响 x 与 y 之间关系的形态或方向。方程(5.3)等价于：

$$y = a + b_1x + b_2zx \quad (5.4)$$

在方程(5.4)中，变量 z 与预测变量 x 和因变量 y 都不相关，但它通过与变量 x 的交互作用(以乘积 zx 作为载体)改变 x 与 y 的关系的形态，这类调节变量称为纯调节变量。

如果调节变量 z 不仅与预测变量 x 有交互作用，并且其本身也是一个预测变量那么它就是图1方框3中的半调节变量，用线性方程表示即为：

$$y = a + b_1x + b_2zx + b_3z \quad (5.5)$$

半调节变量本身也是预测变量，那么它当然应该与因变量 y 有相关关系，并且还可能与预测变量 x 有相关关系。由于方程中 z 与 x 的对称性，仅仅根据数学形式无法判断 y 与 x 哪一个是调节变量。这个问题虽然在数学上(比如估计方程时)无关紧要，但其理论意义是大不相同的。如果对两者不作区分，很可能造成一个模型理论解释上的逻辑混乱。正是这个原因，计量心理学将调节变量限制为纯调节变量，以消除在判断两个预测变量哪个是调节变量时产生的模糊性(Sharma等, 1981)。但是，这样的限制也同时缩小了我们对变量间关系探索的范围，所以，既要尽可能地消除模糊性又不至于使调节变量的设立范围受到限制，对半调节变量的判断首先应该以相关理论为基础。一个模型中两个预测变量哪个还起着半调节变量的作用，首先要有相关理论上的解释和理由，然后才有进行检验的意义。

5.1.3 调节变量的识别与检验

调节变量的识别就是确定某个变量 z 是不是调节变量，如果是，又是哪类调节变量。对调节变量的识别主要是通过两种统计检验方法进行的，即层次回归技术和分组分析方法^[15]。

(1) 层次回归技术

MRA方法是通过检验以下三个回归方程是否有显著性差异来识别一个假设的调节变量z:

$$y = a + b_1x + \varepsilon \quad (5.6)$$

$$y = a + b_1x + b_2z + \varepsilon \quad (5.7)$$

$$y = a + b_1x + b_2z + b_3xz + \varepsilon \quad (5.8)$$

① 如果 $b_3 = 0, b_2 \neq 0$, 即方程(5.7)与方程(5.8)没有显著差异, 那么z不是调节变量, 只是一个预测变量;

② 如果 $b_3 \neq 0, b_2 = 0$, 那么方程(5.6)与方程(5.7)没有显著差异, 但方程(5.8)与方程(5.6)显著不同, 此时z为纯调节变量;

③ 如果 $b_3 \neq 0, b_2 \neq 0$, 那么三个方程都显著不同, 此时z为半调节变量。

MRA方法只能识别和检验纯或半调节变量, 对同质调节变量的识别和检验是通过分组分析方法进行的。

(2) 分组分析

分析方法以假设的调节变量z为基础将样本分为若干个子样本, 通过比较由各个组的样本估计出来的x与y关系的回归方程来达到识别和检验调节变量的目的。

样本分组后, 一般来说我们可以用邹检验(Chow test)来判断由各个组的样本估计出来的同一个回归方程是否相同, 也就是检验回归方程的结构稳定性。但是, 邹检验无法判断回归方程结构的改变是由于斜率还是截距项或是两者都发生了变化, 因而也就无法识别调节变量的类型。用虚拟变量法虽然可以解决这个问题(在这里虚拟变量就是调节变量), 但当调节变量为连续变量时, 人为地将连续变量分段以作为样本分组的基础又可能造成信息损失, 所以用分组分析方法检验连续调节变量是不合适的。另外, 方差分析(ANOVA)也可以用于判别交互作用, 但这种方法更适合于安排好的试验而不是观测和调研数据。

由此可见, 虽然各种分组分析方法可用来检验调节变量, 但由于其单独使用时的种种局限, 在实际应用中我们需要格外谨慎。一个较好的策略是在理论的支持下, 主要用它来检验同质调节变量(比如样本分组后进行邹检验), 其他调节变量用MRA方法识别和检验; 如果只是探索性的研究, 则先用MRA方法对调节变量进行识别, 排除了其他可能后再用分组分析方法来检验同质调节变量存在的可能。

5.2 可调节变量的确定和检验

5.2.1 数据的采集

在问题三中仿真模型得到的随机数据中选取 15 个替代率和缴费率的数据,

并通过计算退休职工的参保人数与在职职工参保人数比值得到抚养比数据，三组数据变化如下图 5.3 所示：

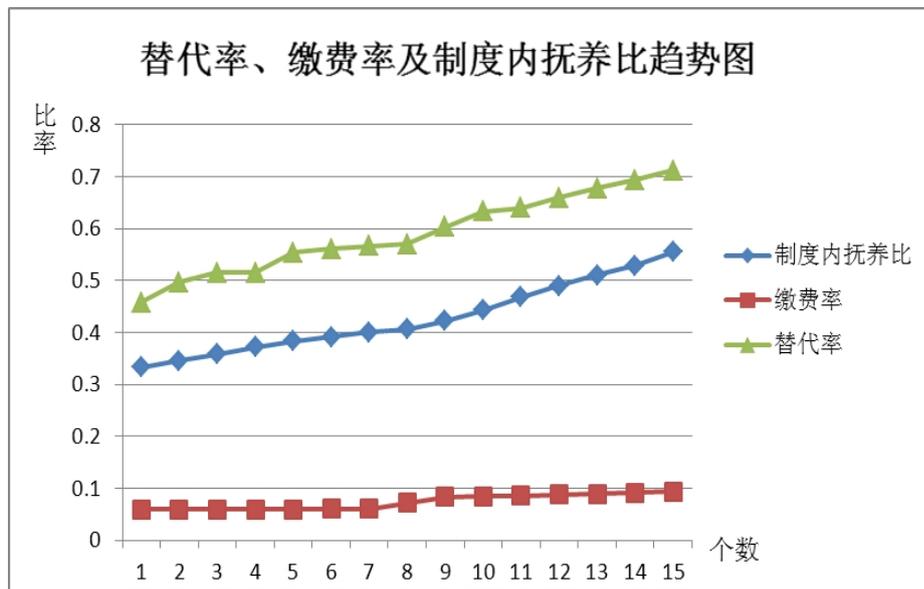


图 5.3 替代率、缴费率及制度内抚养比趋势比

由上图知，缴费率、替代率及制度内抚养比有同步上升的趋势，即三个变量有一定相关性。下面运用 Eviews5.0，对三个变量进行实证分析。

5.2.2 实证分析

(1) 格兰杰检验

为了确定自变量和因变量，首先对缴费率和替代率进行格兰杰因果检验，检验结果如下图 5.4 所示：

Sample: 1 15
Lags: 1

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Probability
C2 does not Granger Cause R	14	7.95591	0.01665
R does not Granger Cause C2		0.88216	0.36778

图 5.4 格兰杰因果检验

由图 5.4 知，在 5% 的显著性水平下，拒绝“缴费率不是替代率的格兰杰原因”的原假设，即缴费率是替代率的格兰杰原因，不能拒绝“替代率不是缴费率的格兰杰原因”的原假设，即替代率不是缴费率的格兰杰原因，所以把缴费率作为自变量，替代率作为因变量进行建模。

(2) 层次回归技术检验

建立调节变量回归分析模型，进行层次回归技术检验。即对模型 (5.6)、

(5、7)、(5、8) 分别进行回归分析, 观察各变量系数是否显著, 从而判断可调节变量类型。

对变量进行检验, 模型结果如下图 5.5 所示:

Sample: 1 15 Included observations: 15				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.500290	0.136915	-3.654032	0.0038
C2	7.988006	1.640706	4.868640	0.0005
H*C2	-19.08447	4.126318	-4.625061	0.0007
H	2.619999	0.370459	7.072312	0.0000

图 5.5 调节变量回归分析模型图

其中缴费率与制度内抚养比的乘积可以体现二者的交互作用, 由于缴费率与制度内抚养比前的系数均不为零, 故制度内抚养比为半调节变量, 其与替代率和缴费率都存在相关关系。

5.3 基于可调节变量的替代率、缴费率仿真模型

5.3.1 模型建立

由5.2.2知, 制度内抚养比为半调节变量, 对替代率与缴费率都存在相关关系, 故对问题三中替代率与缴费率模型进行修改, 将原来的在职职工平均增长率修改为在职职工平均增长率 \times (1-制度内抚养比), 得到如下公式:

(1) 缴费率模型-----基于个人支出基金收支平衡模型

$$Y(1+\alpha\times(1-h))^T \times T\% + \frac{C^1(1+r)\left[(1+r)^T - 1\right]}{r} = \frac{(C^1 + C^2)(1+r)\left[(1+r)^T - (1+\alpha\times(1-h))^T\right]}{r - \alpha\times(1-h)} \quad (5.9)$$

(2) 替代率——基于个人替代率定义模型

①个人的基础养老金账户支出模型

$$ST = \frac{\overline{W}_a(1+\alpha\times(1-h))^{T-1}(1+I)}{2} \times T \times b\% \quad (5.10)$$

②个人的个人账户支出模型

$$SG = C^2 \overline{W}_a \frac{(1+\alpha\times(1-h))^T - (1+r)^T}{Y(\alpha\times(1-h) - r)} \quad (5.11)$$

③个人替代率定义模型

$$R = \frac{ST + SG}{\overline{W}_a (1 + \alpha \times (1 - h))^{T-1}} = \frac{1+I}{2} \times T \times b\% + C^2 \frac{(1 + \alpha \times (1 - h))^T - (1+r)^T}{Y(\alpha \times (1 - h) - r)(1+r)^{T-1}}$$

(5.12)

(3) 个人养老金收支结余的约束模型

$$\begin{aligned} \Delta &= S - P \\ &= C^1 \sum_{n=0}^T \overline{W}_a (1 + \alpha \times (1 - h))^n + C^2 \sum_{n=0}^T \overline{W}_a (1 + \alpha \times (1 - h))^n (1+r)^{T-n} - \\ &LE \left[\frac{\overline{W}_a (1 + \alpha \times (1 - h))^{T-1} (1+I)}{2} \times T \times b\% + C^2 \overline{W}_a \frac{(1 + \alpha \times (1 - h))^T - (1+r)^T}{Y(\alpha \times (1 - h) - r)} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

(5.13)

5.3.2 结论分析

基于上述模型，运用 R 软件仿真得到个人缴费率 C^2 的预测区间为 [0.029, 0.049]；总的缴费率 ($C^2 + 1$) 为 [0.229, 0.249]；总 R 的预测区间为 [0.341, 0.750]。与未加入可调节变量的预测区间相比，此处的 C^2 的预测区间变小， R 的预测区间略微增大，制度内抚养比可以衡量人口老龄化程度，故人口老龄化越发严重时，对养老基金需求变大，因此会加剧养老金缺口。

6 模型评价和推广

本文围绕我国城乡居民养老保险体系可持续化问题，从现实情况出发，引入了大量的相关变量，运用相关数据，分层次、多角度的分析了当前我国的养老保险制度，针对四个问题，分别建立了适合的数学模型，并进行了合理性分析、检验和计算，最后得到了中国城乡居民养老金收支的宏观数学模型、养老金缺口预测模型、替代率和缴费率的仿真模型、政策仿真预测模型以及基于可调节变量的替代率和缴费率的仿真模型，较好地反应出我国养老保险系统当前的态势、未来的趋势及政府政策实施的成效。

但由于时间仓促，本文在模型建立和数据处理上，还存在一些问题。为此，本文有以下几点可以改进：

针对问题一，本文忽略了养老金的第三层次——个人储蓄型养老保险，对新

农保的分析不够深入。

针对问题二，建立的养老金缺口模型中，作了简化，数据的处理上也作了一些经验判断，虽然不会对模型结果产生结构性影响，但可能导致结果不够精准。

针对问题三，对于各国养老保险制度，值借鉴了参数性改革，对制度性改革，没有深入了解；对政策的仿真预测，只选取了重要且可操作性强的四项政策，可能考虑前全面。

针对问题四，对于可调节变量的理解可能不够深入，选取的可调节变量不一定是对模型影响最为显著的。

对于这些问题，有待我们进一步探讨和研究。此模型可应用于养老保险系统的缺口预测和政策效果预测。

7 参考文献

- [1] 王晓军.中国养老金制度及其精算评价[M].北京：经济科学出版社,2000.19.
- [2] 扬燕绥.企业年金理论和务实[M].中国劳动社会保障出版社.2007.
- [3] 钱振伟,卜一,张艳.新型农村社会养老保险可持续发展的仿真评估：基于人口老龄化视角[J].经济学家，2012,(9).
- [4] 杨建.中国城镇企业-老人-中人-新人-养老金水平协调研究[D].辽宁:辽宁大学,2011.
- [5] 孙华平,张洪慧.企业年金的理论分析.商业研究.2009,(22).
- [6] 段克峰.基于一种符合模型的中国人口预测模型[J].统计与决策,2012,(20).
- [7] 姜英霞.中国城镇职工社会养老保险基金未来收支缺口的精算预测[D].山东:山东财经大学,2013.
- [8] 郭永斌.我国养老保险资金缺口的评估和可持续性分析[J].保险市场，2013,(440).
- [9] 北京大学中国经济研究中心宏观组.中国社会养老金制度的选择:激励与增长[J].金融研究,2010 (5).
- [10] 邓大松.美国社会保障制度研究[M].武汉:武汉大学出版社,1999.
- [11] 丁纯.德国社会保障体制的现状与改革[J].国际经济评论.2000.
- [12] 郑秉文,史寒冰.东亚国家地区养老社会保障模式比较[J].世界经济与政治,2001,(8).
- [13] 刘钧.社会保险缴费水平的确是:理论与实证分析[J]. 财经研究，2004(2).
- [14] 李艾,李君文.调节变量辨析：类型、表述和识别[J].数理统计与管理,2008(3).
- [15] Yvonne Sin. China Pension Liabilities and Reform Options for Old Age Insurance[R]. The World Bank Working Paper,N0. 33116, 2005.