

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

学 校	解放军信息工程大学
参赛队号	90005013
队员姓名	1. 刘 骏
	2. 李 鹏
	3. 刘亚奇

参赛密码 _____

(由组委会填写)



第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目 功率放大器非线性特性及预失真建模

摘 要：

信号的功率放大是电子通信系统的关键功能之一，其实现模块称为功率放大器（PA，Power Amplifier），简称功放。为了提高功率放大器的效率，通常又要求其工作在饱和状态，这必然就会带来严重的非线性。功放的非线性失真会使得原始信号的频谱扩展，从而对邻近信道造成较大的干扰。功率放大器的线性化，是解决其效率和线性度矛盾的有效方法，能够使功放在输出高功率和高效率的同时，保持良好的线性度。常用预失真技术^[1](Predistortion)。本文主要研究对象为预失真技术中的功放模型的建立及预失真算法的研究。

对于问题一，我们首先建立了无记忆功放的泰勒级数模型，利用最小二乘估计得到不同阶数的 NMSE 指标（图 4.1），综合考虑选取阶数为 10，此时 NMSE=-94.5dB。为了解决最小二乘估计阶数增加后的不稳定性，将观测矩阵正交化后，采用最小二乘估计得到不同阶数对应的 NMSE 指标（图 4.3），阶数为 10 时，NMSE=-97.5dB。为了避免求逆运算，采用 LMS 自适应算法来求解，由于数据有限，无法达到收敛，性能比较差（图 4.7），但重复利用数据 40 次后，性能有所改善，NMSE=-42.6dB（图 4.8）。

对于无记忆预失真器同样建立泰勒级数模型，由于数据有限，自适应算法很难收敛，所以采用直接学习结构，将功率放大器的输出减小 g 倍后作为输入， g 为理想的线性放大倍数，功率放大器的输入作为输出，通过拟合得到的系统即为预失真器。对于模型的求解，分别使用了最小二乘估计，施密特正交化后求解，估计出预失真器参数。最后用 NMSE 评价预失真系统，预失真器在 10 阶时，可以达到 NMSE=-59.03dB。此时线性化放大倍数可以达到理论最大值 $g_{\max} = 1.8265$ 。

对于问题二，首先建立了有记忆功放的“和记忆多项式”模型，它是在无记忆泰勒级数的基础上加入了时延项，利用最小二乘估计得到在不同阶数 K ，记忆深度 M 下，NMSE 的变化曲线图（图 4.14）。我们选取有记忆功放“和记忆多项式”模型的阶数 $K=3$ ，记忆深度 $M=5$ ，此时 NMSE=-45.05dB。

在有记忆预失真的建模中，预失真器的模型同样为“和记忆多项式”模型，依据计算量和 NMSE 的变化情况，我们首先确定有记忆功放的模型参数为阶数 $K=3$ ，记忆深度 $M=5$ 。我们分别使用直接学习法和间接预失真学习法求解模型。我们得出了预失真器在不同阶数 K ，记忆深度 M 下，预失真补偿后系统的 NMSE 的变化曲线图（图 4.17、图 4.19）。对于直接学习法，最佳的阶数和记忆深度为 $K=3$ 、 $M=5$ ，此时 $NMSE=-45.4\text{dB}$ ，线性化放大倍数 $g=9.4528$ ；对于间接预失真学习法，最佳的阶数和记忆深度为 $K=4$ 、 $M=4$ ，我们提出一种改进的间接预失真学习结构图（图 4.15），求得 $NMSE=-44.1\text{dB}$ 、 $g=9.456$ 。

对于问题三，我们利用直接法求信号的功率谱密度函数，得到输入信号、无预失真补偿的功率放大器输出信号、采用预失真补偿的功率放大器输出信号的功率谱图，并计算各自的 ACPR。输入信号 $ACPR=-78.5\text{dB}$ ，无预失真输出信号 $ACPR=-37.3\text{dB}$ ，直接学习法和间接学习法的有预失真输出信号的相邻信道功率比分别为 $ACPR=-52.2\text{dB}$ 、 $ACPR=-50.1\text{dB}$ 。比较 ACPR 可以直观地发现，采用预失真补偿的功率放大器的频谱泄露明显减小。

一、 问题重述

信号的功率放大是电子通信系统的关键功能之一，其实现模块称为功率放大器（PA，Power Amplifier），简称功放。功放的输出信号相对于输入信号可能产生非线性变形，这将带来无益的干扰信号，影响信息的正确传递和接收，此现象称为非线性失真。传统电路设计上，可通过降低输出功率的方式减轻非线性失真效应。

功放非线性属于有源电子器件的固有特性，研究其机理并采取措施改善，具有重要意义。目前已提出了各种技术来克服改善功放的非线性失真，其中预失真技术是被研究和应用较多的一项新技术，其最新的研究成果已经被用于实际的产品（如无线通信系统等），但在新算法、实现复杂度、计算速度、效果精度等方面仍有相当的研究价值。

本题从数学建模的角度进行探索。若记输入信号为 $x(t)$ ，输出信号为 $z(t)$ ， t 为时间变量，则功放非线性在数学上可表示为 $z(t) = G(x(t))$ ，其中 G 为非线性函数。预失真的基本原理是：在功放前设置一个预失真处理模块（PD，Predistorter），这两个模块的合成总效果使整体输入-输出特性线性化，输出功率得到充分利用。原理框图如图 1.1 所示。

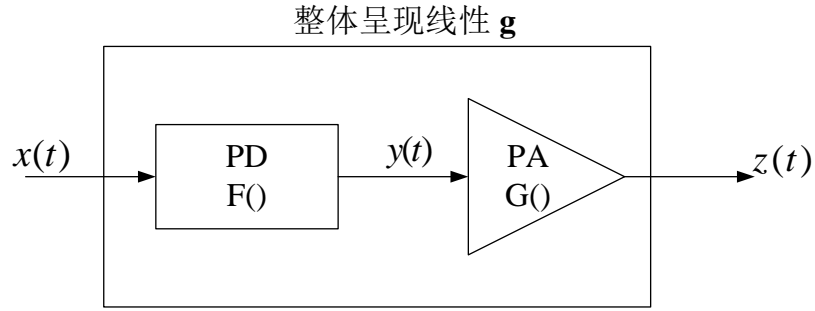


图1.1 预失真技术的原理框图示意

其中 $x(t)$ 和 $z(t)$ 的含义如前所述， $y(t)$ 为预失真器的输出。设功放输入-输出传输特性为 $G(\cdot)$ ，预失真器特性为 $F(\cdot)$ ，那么预失真处理原理可表示为

$$z(t) = G(y(t)) = G(F(x(t))) = G \circ F(x(t)) = L(x(t)) \quad (1.1)$$

$G \circ F = L$ 表示为 $G(\cdot)$ 和 $F(\cdot)$ 的复合函数等于 $L(\cdot)$ 。线性化则要求

$$z(t) = L(x(t)) = g \cdot x(t) \quad (1.2)$$

式中常数 g 是功放的理想“幅度放大倍数”($g > 1$)。因此，若功放特性 $G(\cdot)$ 已知，则预失真技术的核心是寻找预失真器的特性 $F(\cdot)$ ，使得它们复合后能满足

$$G(F(x(t))) = (G \circ F)(x(t)) = L(x(t)) = g \cdot x(t) \quad (1.3)$$

如果测得功放的输入和输出信号值，就能拟合功放的特性函数 $G(\cdot)$ ，然后利用 (1.3) 式，可以求得 $F(\cdot)$ 。

本题探索中，预失真处理建模还需考虑以下 2 个约束条件：

预失真处理的“输出幅度限制”。由于功放的输入幅度需保持在一定范围，过大的值会导致饱和溢出，因此，本题的建模中限定预失真处理的输出幅度不大于所给出的功放输入幅度最大值。

预失真处理加载后，尽可能使功放的输出“功率最大化”。为了充分发挥功放的作用，预失真处理模型的建立必需考虑尽可能使功放的信号平均输出功率

最大，因此预失真处理后的输出幅度（等效为功放的输入幅度）需尽可能提高。

模型的数值计算结果业界常用 NMSE、EVM 等参数评价其准确度，具体定义如下。

采用归一化均方误差 (Normalized Mean Square Error, NMSE) 来表征计算精度，其表达式为

$$NMSE = 10 \log_{10} \frac{\sum_{n=1}^N |z(n) - \hat{z}(n)|^2}{\sum_{n=1}^N |z(n)|^2} \quad (1.4)$$

如果用 z 表示实际信号值， \hat{z} 表示通过模型计算的信号值，NMSE 就反映了模型与物理实际模块的接近程度。功放前加载预失真处理后，也可用 NMSE 判断整体模型输出值与理想输出值的近似程度。

误差矢量幅度 (Error Vector Magnitude, EVM) 定义为误差矢量信号平均功率的均方根和参照信号平均功率的均方根的比值，以百分数形式表示。如果用 X 表示理想的信号输出值， e 表示理想输出与整体模型输出信号的误差，可用 EVM 衡量整体模型对信号的幅度失真程度。

$$EVM = \sqrt{\frac{E[e^2]}{E[X^2]}} \times 100\% \quad (1.5)$$

在上述提供的背景材料以及自行查阅相关文献资料的基础上，研究以下问题。要求写出计算的过程、注明所用的优化方法、解释选择中间参数的理由、并附上所用的程序 (C/C++/Java/Matlab 等)。为保证所用模型的工程可实现性，请考虑选用适当复杂度的模型和算法。

1. 无记忆功放

数据文件 1 给出了某功放无记忆效应的复输入-输出测试数据，其输入-输出幅度图如图 2 所示：

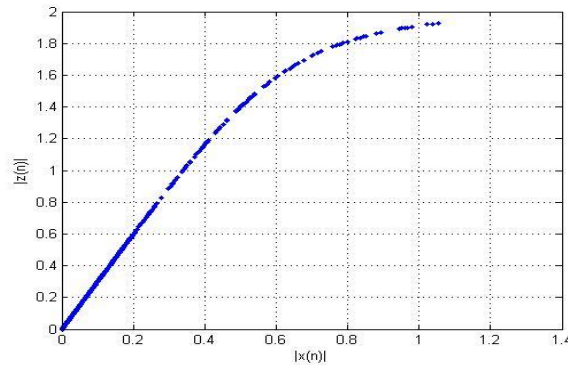


图 1.2 功放输入/输出幅度散点图

请根据提供的数据，完成以下任务。

A. 建立此功放的非线性特性的数学模型，然后用 NMSE 评价所建模型的准确度。

B. 根据线性化原则以及“输出幅度限制”和“功率最大化”约束，建立预失真模型。写出目标误差函数，计算线性化后最大可能的幅度放大倍数，运用评

评价指标参数 NMSE/EVM 评价预失真补偿的结果。

2. 有记忆功放

数据文件 2 给出了某功放的有记忆效应的复输入-输出数据，请完成以下任务。

A. 建立此功放的非线性特性的数学模型，然后用 NMSE 评价所建模型的准确度。

B. 根据线性化原则以及“输出幅度限制”和“功率最大化”约束，以框图的方式建立预失真处理的模型实现示意图（提示：可定义基本实现单元模块和确定其之间关系，组成整体图），然后计算预失真模型相关参数。运用评价指标参数 NMSE/EVM 评价预失真补偿的计算结果。

3. 拓展研究

相邻信道功率比（Adjacent Channel Power Ratio, ACPR）是表示信道的带外失真的参数，衡量由于非线性效应所产生的新频率分量对邻道信号的影响程度。其定义为

$$ACPR = 10 \log_{10} \frac{\int_{f_2}^{f_3} s(f) df}{\int_{f_1}^{f_2} s(f) df} \quad (1.6)$$

其中 $s(f)$ 为信号的功率谱密度函数， $[f_1, f_2]$ 为传输信道， $[f_2, f_3]$ 为相邻信道。功率谱密度的计算可通过对信号的自相关函数进行 Fourier 变换计算，也可以通过直接法等计算（假定本题涉及的信号为时间平稳信号）。

如果题 2 所附的数据采样频率 $F_s = 30.72 \times 12 \text{ MHz}$ ，传输信道按照 20MHz 来算，邻信道也是 20MHz。根据给出的数据，请计算功放预失真补偿前后的功率谱密度，并用图形的方式表示三类信号的功率谱密度（输入信号、无预失真补偿的功率放大器输出信号、采用预失真补偿的功率放大器输出信号），最后用 ACPR 对结果进行分析评价。

二、 问题假设与基本符号说明

3.1 问题假设

（1）假设信号为平稳信号

3.2 基本符号说明

$x(n)$ ： n 时刻输入

$z(n)$ ： n 时刻输出

K ： 模型的非线性阶数

M ： 模型的记忆深度

$F()$ ： 预失真特性函数

$G()$ ： 功放特性函数

三、 问题分析

对于问题 1 要求在满足相应约束条件下,建立无记忆功放及预失真器的非线性数学模型,设定误差目标函数,并求解其参数,同时用 NMSE 评价所建模型的准确度。对于无记忆非线性模型实质上主要考虑两种类型的失真,即调幅-调幅(AM-AM)特性和调幅-调相(AM-PM)特性。泰勒级数模型可以很好的描述无记忆非线性的两种失真,因此我们采用泰勒级数模型。对于功放模型的参数的求解,可以直接利用最小二乘估计得到其解析解,也可以通过自适应算法迭代求出其参数。对于预失真模型的求解,可以通过对数据 $(z/g, x)$ 进行拟合直接得到,也可以通过自适应算法求得,先求出功率放大器的逆系统,理想的线性输出信号通过该逆系统得到预失真器的理想输出,利用预失真器的理想输出和实际输出自适应地迭代调整预失真器的参数,最终得到预失真模型。输入信号依次通过预失真器、功率放大器得到系统输出信号,将系统输出信号与理想输出信号比较得到 NMSE 和 EVM。

对于问题 2 要求在满足相应约束条件下,建立有记忆功放及预失真器的非线性数学模型,并求解其参数,同时用 NMSE 评价所建模型的准确度。我们采用记忆多项式模型来描述构造有记忆功放及预失真器,该模型系数提取方法简单、系数数量少,其求解过程与问题 1 类似。

对于问题 3 要求用图形的方式表示三类信号的功率谱密度,并用 ACPR 对结果进行分析评价。可以利用直接法求得三类信号的功率谱密度,分别计算其 ACPR,并对结果进行分析。

四、 模型建立与求解

4.1 问题一 A 的建模与参数提取

4.1.1 泰勒级数模型

一种经典的描述无记忆非线性功放的数学模型是泰勒级数模型^[2]:

$$z(n) = \sum_{k=1}^K a_{2k-1} x(n) |x(n)|^{2k-1} \quad (4.1)$$

式(4.1)中参数 $a_i (i=1,2,\dots,K)$ 为复数值(K 为泰勒级数模型的阶数),因此可以同时提供功放输出的幅度和相位失真的信息。这个模型只包含输入信号功率的奇次分量。如果功放是无记忆的话,其输出只会由输入信号功率的奇次分量产生,输入信号的偶次分量不会对功放输出产生影响。

但是实际使用的功放只能用输入信号的全部功率来精确的进行描述,如式(4.2)所示:

$$z(n) = \sum_{k=1}^K a_k x(n) |x(n)|^{k-1} \quad (4.2)$$

4.1.2 泰勒级数模型参数提取

(1) 最小二乘估计求解

上述模型中参数为 $A=[a_1, a_2, \dots, a_K]^T$ ，通过观察 $x(n)$ 和 $z(n)$ 的 N 次采样来估计参数，令

$$Z=[z(0), z(1), \dots, z(N)]^T$$

$$X = \begin{bmatrix} x(0) & x(0)|x(0)|^1 & \dots & x(0)|x(0)|^{K-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(N) & x(N)|x(N)|^1 & \dots & x(N)|x(N)|^{K-1} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

式 (4.2) 可以重新表达为

$$\hat{Z} = XA \quad (4.4)$$

其中 \hat{Z} 表示通过模型求得的估计值。利用最小二乘的方法求解 A ，误差平方和表示为：

$$J = \sum_{n=1}^N |\hat{z}(n) - z(n)|^2 = \sum_{n=1}^N (\hat{z}(n) - z(n))(\hat{z}(n) - z(n))^* = (XA - Z)^H (XA - Z) \quad (4.5)$$

为求解 J 的最小值，对 A 求导并使结果为零（即 $\frac{\partial J}{\partial A} = 0$ ），可得：

$$2X^H XA - 2X^H Z = 0 \quad (4.6)$$

因此

$$A = (X^H X)^{-1} X^H Z \quad (4.7)$$

依据将题目提供的数据，应用最小二乘求解，得到功放模型参数 $a_k (k=1, 2, \dots, K)$ ，将阶数分别取 $K=1, 2, \dots, 40$ ，功放模型的 NMSE 随阶数变化情况如图 4.1 所示：

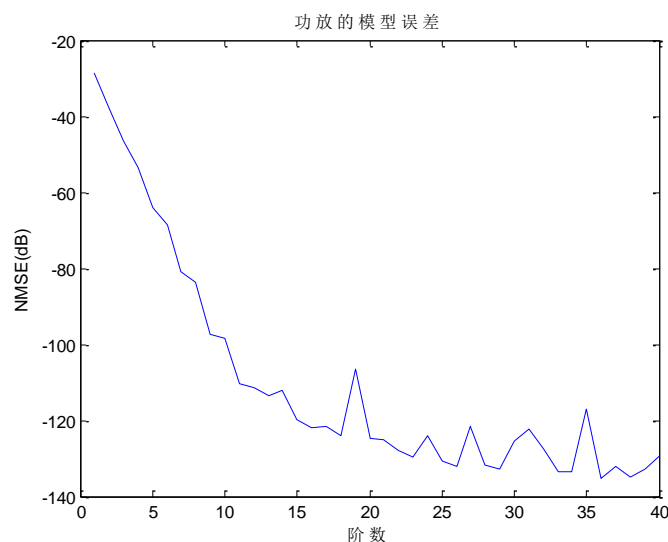


图 4.1 NMSE 随阶数变化曲线

图4.1中，X轴表示功放模型的阶数，Y轴表示对应阶数的功放模型的NMSE。由图4.1可以看出随着阶数的增大，总体上NMSE越来越小，但是随着阶数的增大，NMSE降低的趋势减缓，且有波动。这里设置阶数为10，可以求 $NMSE = -94.5dB$ ，拟合结果如图4.2所示：

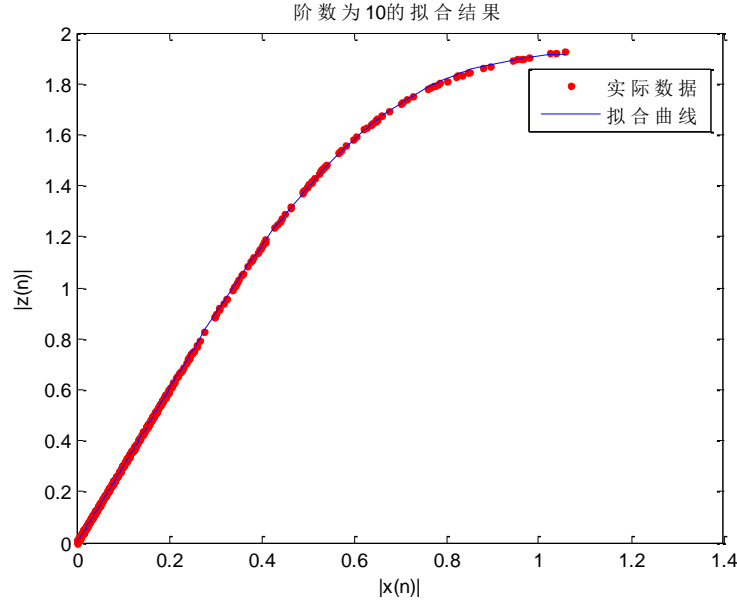


图 4.2 功放模型输出与实际输出幅度曲线比较（10 阶）

由图4.2可以看出，功放模型输出幅度与实际输出幅度拟合较好。

基于最小二乘估计的求解算法具有数学稳定性方面的问题（从图4.1可以看出）。这是由于用来产生矩阵的列的函数不能使得产生的列是互相正交的。因此式（4.7）中 $X^H X$ 的逆矩阵实际上是数学不稳定的。

可以把 X 的列进行施密特正交化，则得到新的矩阵 X' ，此时 X' 的每列都是正交的，同样利用式（4.7）可以估计出参数 $A' = [a'_0, a'_1, \dots, a'_K]^T$ 。

令

$$X = [x_0, x_1, \dots, x_K] \quad (4.8)$$

其中

$$x_k = [x_k(0), x_k(1), \dots, x_k(N)]^T \quad (k = 0, 1, \dots, K) \quad (4.9)$$

且

$$x_k(n) = x(n) |x(n)|^k \quad (n = 0, 1, \dots, N) \quad (4.10)$$

正交化后

$$X' = [x'_0, x'_1, \dots, x'_K] \quad (4.11)$$

其中

$$x'_k = [x'_k(0), x'_k(1), \dots, x'_k(N)]^T \quad (k = 0, 1, \dots, K) \quad (4.12)$$

且

$$x'_k(n) = x_k(n) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(x_k, x'_i)}{(x'_i, x'_i)} x'_i(n) \quad (n = 0, 1, \dots, N) \quad (4.13)$$

则

$$z(n) = \sum_{k=0}^K a'_k x'_k(n) (n=0,1,\dots,N) \quad (4.14)$$

仍然将题目提供的数据输入该功放模型，得到在不同阶数下模型的 NMSE，并与用一般最小二乘法求解的结果对比，如图 4.3 所示：

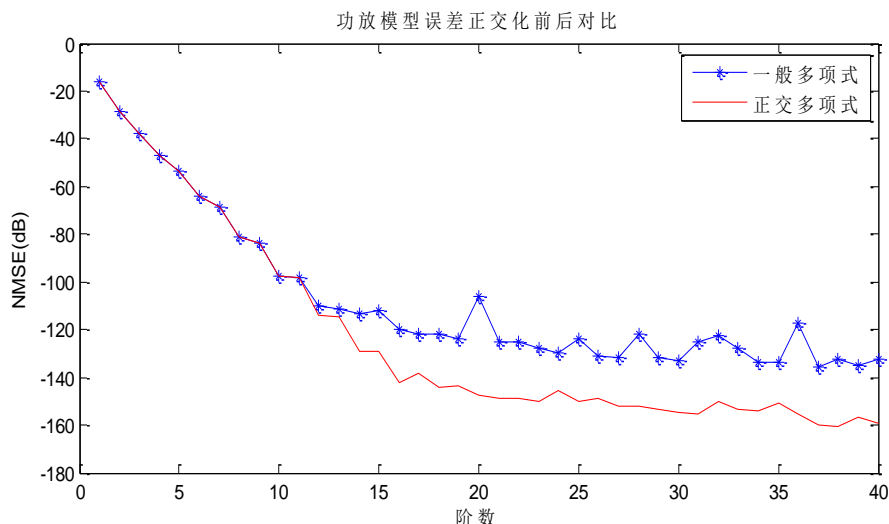


图 4.3 正交化模型 NMSE 对比

从图 4.3 可以看出，正交化功放模型的 NMSE 随着阶数的增加也越来越小，从 10 阶开始，其 NMSE 比未正交化的功放模型的 NMSE 要好，且波动性也明显减弱。综合考虑模型性能和复杂度，我们选定无记忆泰勒模型的阶数为 10，NMSE=-97.5dB，拟合结果如下图所示：

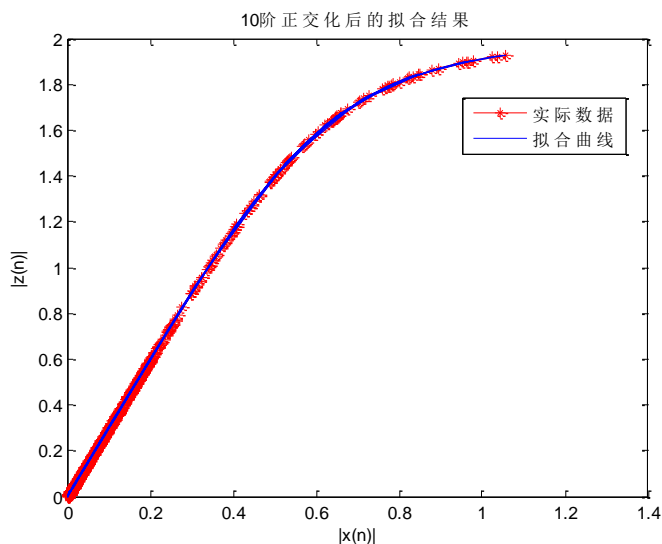


图 4.4 幅度拟合图

(2) 自适应 LMS (Least Mean Square) 算法

为了避免最小二乘解的求逆过程，考虑到计算复杂度低和工程的可实现性，我们采用 LMS 算法来求解。

自适应 LMS 算法框图如图 4.5，图中 $\hat{y}_n(n)$ 是 n 时刻系统输出信号的估计， $x(n)$ 是 n 时刻系统的输入信号， $w_i(i=1,\dots,N)$ 为模型的参数估计，记 $X_n=[x(n)x(n+1)\dots x(n-M+1)]^T$ ， $W=[w_1w_2\cdots w_N]^T$ ，未知离散系统的期望输出信号为 $d(n)$ 。

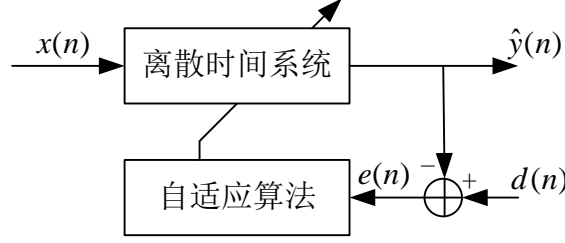


图 4.5 LMS 算法框图

LMS 算法的数学表达式为：

$$e(n) = d(n) - \hat{y}_n(n) = d(n) - X_n^T W \quad (4.15)$$

$$W_{n+1} = W_n + \mu \cdot e(n) X_n^* \quad (4.16)$$

其中 n 代表迭代次数， μ 是自适应步长，其取值范围为：

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (4.17)$$

λ_{\max} 是输入信号 $x(n)$ 的自相关矩阵的最大特征值。 X_n^* 代表对复信号取共轭。则复信号的 LMS 算法的迭代步骤为：

- 1、 初始化模型参数 $w^{(0)}$ ，步长 μ ；
- 2、 经过模型后的输出 $\hat{y}(n) = W_n^T \cdot X_n$ ；
- 3、 计算误差 $e(n) = d(n) - \hat{y}(n)$ ；
- 4、 更新模型参数 $W_{n+1} = W_n + \mu \cdot e(n) X_n^*$ 。

无记忆功放模型框图如图 4.6 所示：

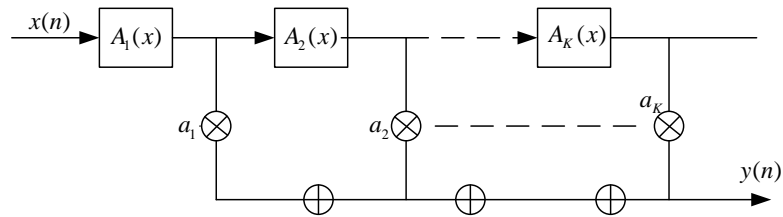


图 4.6 无记忆功放模型框图

其中 $A_k(x(n)) = x(n)|x(n)|^{k-1}$ $k=1,2,\dots,K$ 。 $A=[a_1,a_2,\dots,a_K]^T$ 表示泰勒模型的系数。

对于本题泰勒级数模型参数来说，初始化泰勒级数参数 $A_0=0$ ，期望输出 $d(n)$ 为题目提供功放输出 $z(n)$ 。经过模型后的输出为 $\hat{z}(n) = W_n^T \cdot X_n$ ， X_n 为题目提供的功放输入 $x(n)$ 经过 $A_k(x)$ 模块处理的结果。

利用 LMS 算法，设定步长为 0.1，阶数为 7 时，拟合结果如图 4.7 所示；由于数据量有限，重复利用数据进行多次的迭代，得到拟合结果如图 4.8 所示：

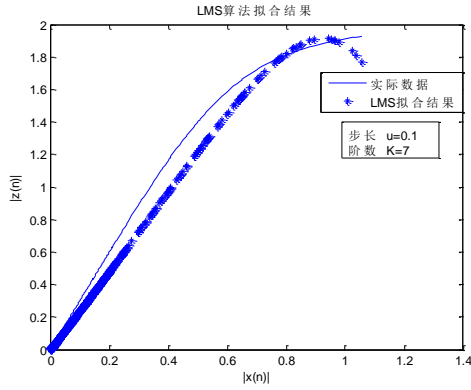


图 4.7 LMS 算法拟合结果

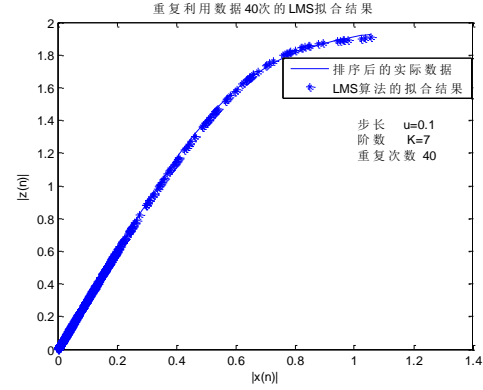


图 4.8 重复利用数据 LMS 拟合结果

4.2 问题一 B 模型的建立与求解

4.2.1 无记忆预失真模型建立

预失真器同样采用泰勒级数模型，如下式：

$$y(n) = \sum_{k=1}^K b_k x(n) |x(n)|^{k-1} \quad (4.18)$$

K 为预失真器的特性 $F(x)$ 的泰勒级数模型的阶数， b_k 为复系数。

4.2.2 输出幅度限制

由于功放的输入幅度需保持在一定范围，过大的值会导致饱和溢出，因此，本题的建模中限定预失真处理的输出幅度不大于所给出的功放输入幅度最大值。由此“输出幅度限制”可以得到线性增益的上限 g_{\max} 。找到功放的输入幅度最大值 $\max |PA_{\text{input}}|$ ，并得到其对应的输出值 PA_{output} 。可用如下公式进行确定：

$$g_{\max} = \frac{PA_{\text{output}}}{\max |PA_{\text{input}}|} \quad (4.19)$$

对于该题的实验数据来说 $g_{\max} = 1.8265$ 。在进行预失真模型处理的时候，将 g_{\max} 做为理想的线性放大倍数，得出预失真器输出时，若预失真器的输出大于所给出的功放输入幅度最大值，则不能满足输出幅度最大限制。需要将 g_{\max} 以微小的步长变小。

4.2.3 功率最大化

为了充分发挥功放的作用，预失真处理模型的建立必需考虑尽可能使功放的信号平均输出功率最大，因此预失真处理后的输出幅度（等效为功放的输入幅度）

需尽可能提高。对于现代数字通信系统来说，功率放大器的非线性特性导致输出信号的功率谱发生扩散，进而影响临近信道的信号。要使功率放大器的输出信号最大，从频率来考虑，即要求信号的功率谱不发生扩散，尽量克服系统的非线性。在进行预失真器特性 $F(x)$ 拟合的时候，将理想线性特性的斜率设为 g_{\max} 。这样只要尽可能的使经过预失真处理的功放的线性特性越接近 g_{\max} ，就既满足了输出幅度限制也满足了功率最大化。

4.2.4 目标误差函数确定及模型求解

由预失真原理框图（图 1.1）以及式（1.3）可知

$$G(F(x(t))) = G \circ F(x(t)) = g \cdot x(t) \quad (4.20)$$

从而有

$$F(x) = G^{-1}(g \cdot x) \quad (4.21)$$

其中， $G^{-1}(\cdot)$ 表示 $G(\cdot)$ 的逆特性。由方程(1.2.2)可知，如果想令 PA 的输出等于 $g \cdot x$ ，则 $F(x)$ 的特性应与 $G(g \cdot x)$ 的特性相反。根据函数压扩原理和拟合原理，如果我们已知没有经过预失真处理的 PA 的输入信号 $x(t)$ 和输出信号 $z(t)$ ，则 $G(\cdot)$ 可以通过对数据 (x, z) 进行拟合得到， $G^{-1}(g \cdot x)$ 即可以通过对数据 $(z/g, x)$ 进行拟合得到，由此可便得到预失真器的特性 $F(x)$ 。如图 4.9 所示：

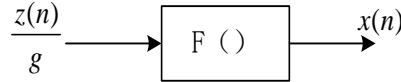


图 4.9 求逆原理图

离散条件下，预失真器的特性 $F(x)$ 的模型同样为泰勒级数模型。对于通过数据 $(z/g, x)$ 进行拟合时，式（4.2）变为：

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^K b_k \frac{z(n)}{g} \left| \frac{z(n)}{g} \right|^k \quad (4.22)$$

其中 $z(n)$ 为未做预处理时的复输出测试数据， $\hat{x}(n)$ 为泰勒级数模型计算的功放输出数据， K 为预失真器的特性 $F(x)$ 的泰勒级数模型的阶数。

与求解无记忆功放模型相似，利用最小二乘算法得到预失真器的特性 $F(x)$ 。其目标误差函数：

$$J = \sum_{n=1}^N |\hat{x}(n) - x(n)|^2 \quad (4.23)$$

其中 $x(n)$ 为未做预处理时的复输入测试数据。

将题目提供的数据 $\frac{z(n)}{g}$ 作为输入，利用最小二乘估计，求得其经过预处理器的输出 $\hat{x}(n)$ ，与理想输出 $x(n)$ 之间的输入-输出幅度拟合图，如图 4.10 所示：

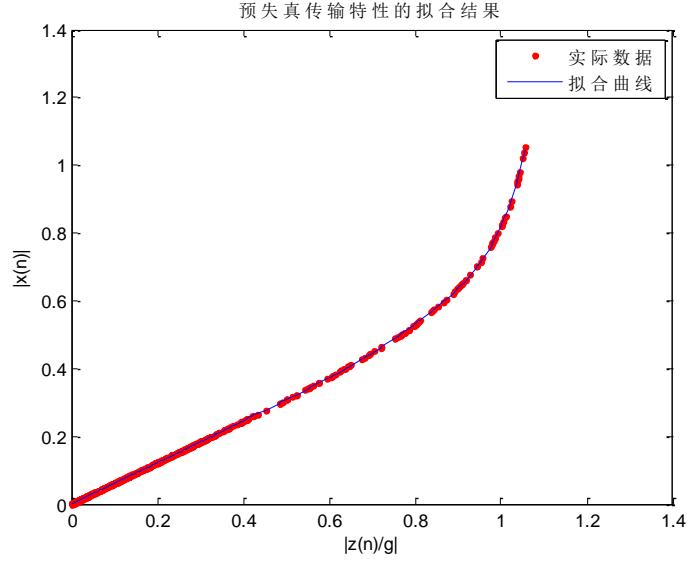


图 4.10 预失真模型输出与理想输出幅度曲线

4.2.5 经过预失真处理的系统性能

将题目提供的输入复信号 $x(n)$ 输入到整个系统，即先通过预失真器，再通过功放模型，得到整个系统的输出。设定无记忆功放和预失真器的非线性阶数都为 10 时，将功放的输入-输出幅度图，预失真器的输入-输出幅度图，以及整个系统的输入-输出幅度图，与理想线性输入-输出幅度图进行直观的观察，如图 4.11 所示：

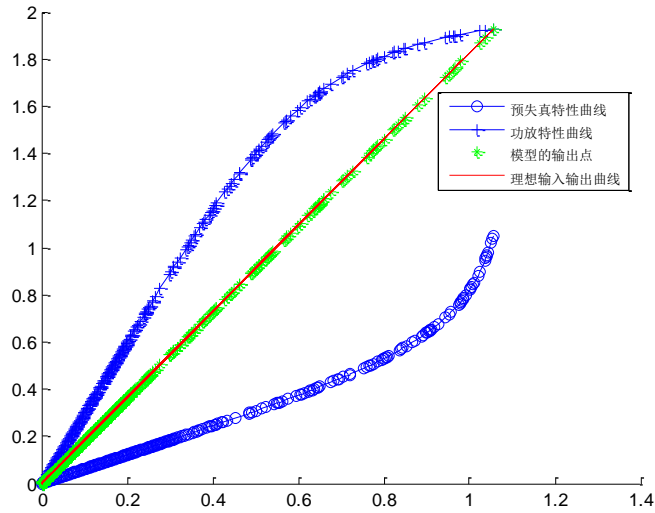


图 4.11 系统输出与理想输出幅度曲线

由图 4.11 看出，预失真模型与功放模型所组成的系统整体模型，输入输出特性与理想线性特性基本完全拟合， $\text{NMSE} = -59\text{dB}$ 。无记忆功放预失真补偿后线性放大倍数可以达到理论最大值 $g_{\max} = 1.8265$ ，此时预失真器输出的最大值为 1.0503，而功率放大器的最大允许输入的幅值为 1.0553，因此满足最大幅度限制。

图 4.12 给出了系统在未正交化和正交化情况下的 NMSE 随着阶数的变化曲线的比较：

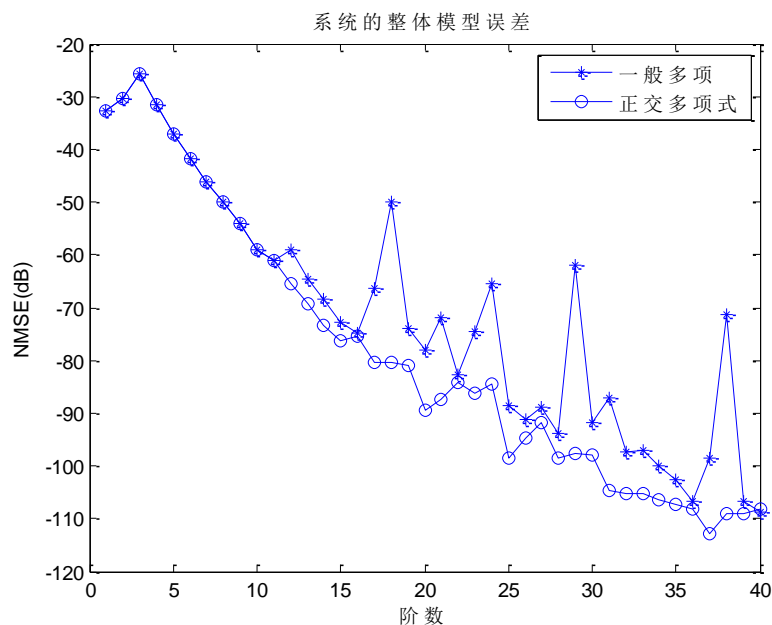


图 4.12 系统未正交化和正交化的 NMSE 随着阶数的变化曲线

由图 4.12 观察到，总体上系统的 NMSE 随着阶数的增加而减小，未经过正交化的最小二乘估计，在阶数较高的时候发生“震荡”。经过正交化后的系统的 NMSE 要比未正交化系统的 NMSE 小，且波动性也小多。

图 4.13 给出了系统整体模型在未正交和正交情况下的误差矢量幅度 (Error Vector Magnitude, EVM)随阶数变化曲线：

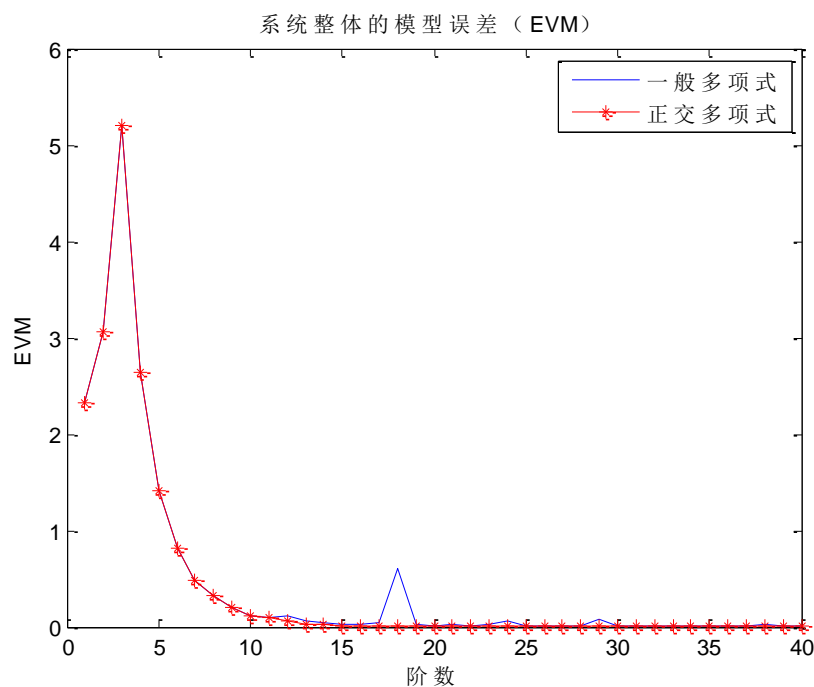


图 4.13 系统整体模型 EVM 随阶数变化曲线

由图 4.13 可以看出，系统整体模型的 EVM 随着阶数的增加而减小，且随着

阶数的增加，正交模型比未正交模型的 EVM 要低，未正交模型的 EVM 随着阶数的增加有波动。

4.3 问题二 A 的建模与参数提取

4.3.1 记忆多项式模型建立

若某一时刻输出不仅与此时刻输入有关，还与之前一段时刻的输入有关，那么对泰勒模型进行推广即可，常用的即为“和记忆多项式”模型：

$$z(n) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^M b_{km} x(n-m) |x(n-m)|^{k-1} \quad (4.24)$$

其中， K 为非线性阶数， M 为记忆深度， b_{km} 为模型系数。

4.3.2 记忆多项式模型参数提取

如果我们已知 $x(n)$ 、 $z(n)$ 分别代表 PA 的输入、输出时域采样序列，也就是说已知功率放大器的输入、输出分别为 X 和 Z ，因为式 (4.24) 是无记忆功放模型的扩展，所以估算参数 b 的方法和节 4.1.2 中用最小二乘估算无记忆功放模型参数的方法类似。通过观察 $z(n)$ 的 N 个采样和 $x(n)$ 的 $N+M$ 个采样来估算参数 b 。则模型系数的计算过程如下：

Z 可表示为：

$$Z = [z(M) \ x(M+1) \ \cdots \ x(M+N)]^T \quad (4.25)$$

令复系数 B 表示为

$$B = [b_{00} \ b_{10} \ b_{20} \ \cdots \ b_{K0} \ b_{01} \ b_{11} \ b_{21} \ \cdots \ b_{K1} \ \cdots \ b_{0M} \ b_{1M} \ b_{2M} \ \cdots \ b_{KM}]^T \quad (4.26)$$

$$X_j = \begin{bmatrix} x(j) & x(j)|x(j)|^1 & \cdots & x(j)|x(j)|^K \\ x(j+1) & x(j+1)|x(j+1)|^1 & \cdots & x(j+1)|x(j+1)|^K \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x(j+N) & x(j+N)|x(j+N)|^1 & \cdots & x(j+N)|x(j+N)|^K \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$X = [X_M \ X_{M-1} \ \cdots \ X_m \ \cdots \ X_0] \quad (4.28)$$

式 (2.1) 可表示为矩阵方程式：

$$Z = XB \quad (4.29)$$

通过 X 和 Z 可以使用最小二乘算法估算出 B ：

$$\hat{B} = (X^H X)^{-1} X^H Z \quad (4.30)$$

设定不同的非线性阶数 K ，记忆深度 M ，得到不同的 NMSE 评价结果如图 4.12 所示：

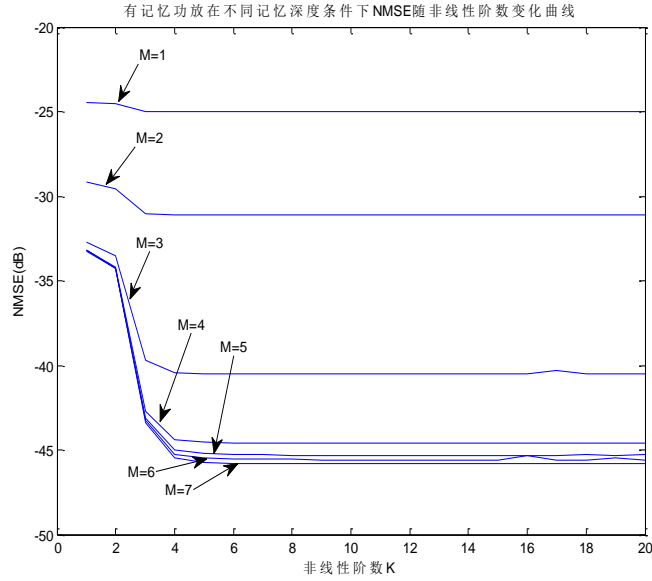


图 4.14 随 K、M 变化的 NMSE 变化曲线

根据模型复杂度以及工程可实现性，我们选择非线性阶数 $K=3$ ，记忆深度 $M=5$ 的模型来表示有记忆多项式模型。此时 $NMSE=-45.05dB$ 。

4.4 问题二 B 模型的建立与求解

4.4.1 有记忆预失真模型建立

传统的间接学习结构中，需要用到预失真器的输出，但实际建立预失真系统时无法得到预失真器的输出结果。即无法得到自适应算法的期望输出。在已知功放输入、输出的条件下，建立如图 4.15 的改进的间接学习结构^[1]，可以解决无法得到预失真器的输出的问题，再用自适应算法来更新系统的参数。

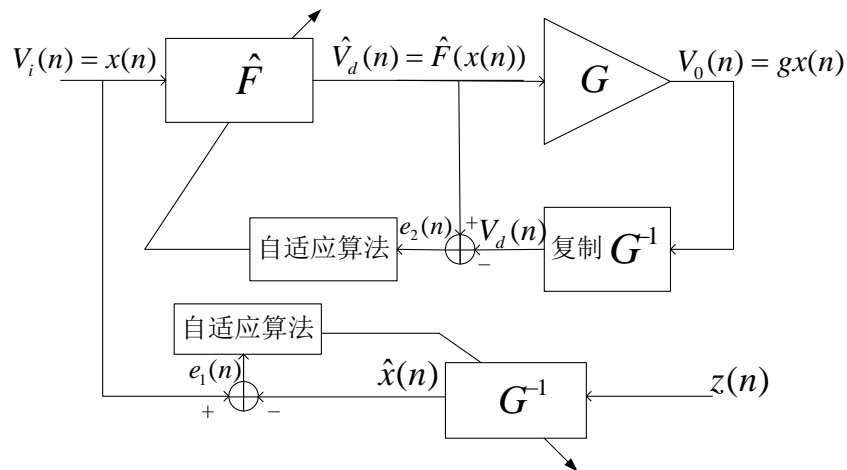


图 4.15 自适应预失真学习框图

其中 $x(n)$ 、 $z(n)$ 分别为功放的实际输入、输出数据， $v_i(n)=x(n)$ 表示系统的输入为 $x(n)$ ， $\hat{V}_d(n)=\hat{F}(x(n))$ 表示输入为 $x(n)$ 时预失真器的输出， $v_o(n)=gx(n)$ 表示输入为 $x(n)$ 时系统的理想输出。算法的主要步骤如下：

- 1、初始化预失真器和功率放大器逆系统的传输系数 H_F 和 $H_{G^{-1}}$ ；
- 2、令 $z(n)$ 作为输入通过功率放大器逆系统 G^{-1} ，输出 $\hat{x}(n)$ ；
- 3、 $\hat{x}(n)$ 与 $x(n)$ 求差值得到 $e_1(n)$ ，利用 $e_1(n)$ 通过自适应算法迭代更新 $H_{G^{-1}}$ ；
- 4、令 $v_o(n)$ 通过更新后的功率放大器逆系统 G^{-1} ，输出 $v_d(n)$ ；
- 5、 $\hat{v}_d(n)$ 与 $v_d(n)$ 求差值得到 $e_2(n)$ ，再通过自适应算法迭代更新 H_F 。

图 4.16 为记忆多项式模型框图。该模型形式简单，参数少，辨识简单，实用性强。因此可采用记忆多项式模型作为功放与预失真器的行为模型。

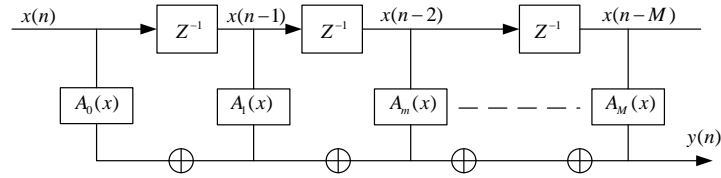


图 4.16 记忆多项式模型框图

图 4.16 中， $A_m(x)$ 的表达式为

$$A_m(x) = \sum_{j=1}^K a_{jm} |x|^{j-1} x \quad m=1, 2; \cdots K \quad (4.31)$$

预失真器输出为

$$y(n) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^M a_{km} x(n-m) |x(n-m)|^{k-1} \quad (4.32)$$

其中， $x(n)$ 和 $y(n)$ 分别表示输入、输出信号。 K 为模型阶数， M 为记忆深度。

4.4.2 经过预失真处理的系统性能

在功放模型取 $K=3, M=5$ 的情况下，对于预失真器，设定不同的记忆深度和非线性阶数，运用最小二乘估计，得到预失真器参数，与期望信号作比较，得到不同记忆深度下，NMSE 随着非线性阶数变化曲线，如图 4.17 所示：

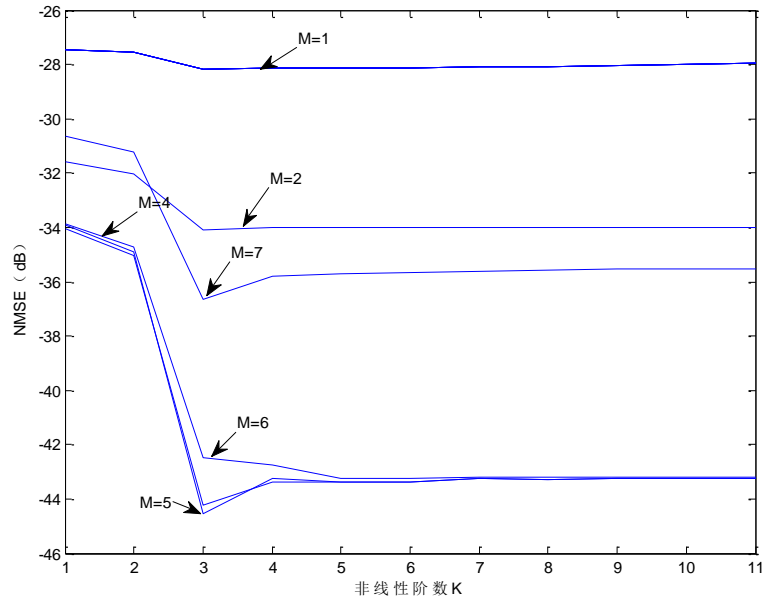


图 4.17 不同记忆深度下 NMSE 随着非线性阶数变化曲线（最小二乘）

由图 4.17 可以看出，当选取预失真器非线性阶数 K 为 3，记忆深度 M 为 5 时， g 无法取到 $g_{\max} = 9.605$ ，因为此时预失真器的最大输出幅度为 0.7213，而功率放大器允许输入的最大幅度为 0.7079，不满足最大幅度约束，因此需要减小 g ，通过遍历，得到 g 最大可以达到 9.4528，此时预失真放大器的最大输出为 0.7075，满足最大输入幅度约束条件，系统性能最好，此时 $NMSE = -45.4\text{dB}$ ，结果图 4.18 如下：

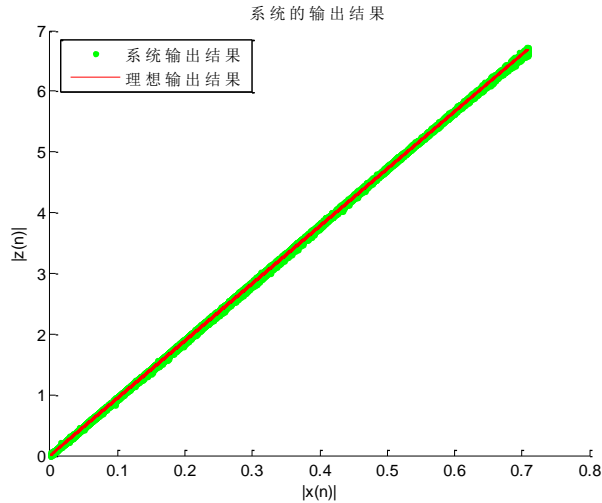


图 4.18 系统特性拟合图

运用 4.4.1 节中自适应学习结构，设定步长为 0.8，在功放模型取 $K=3, M=5$ 的情况下，得到预失真器不同记忆深度 M 和非线性阶数 K 下， $NMSE$ 随着非线性阶数变化曲线，如图 4.19 所示：

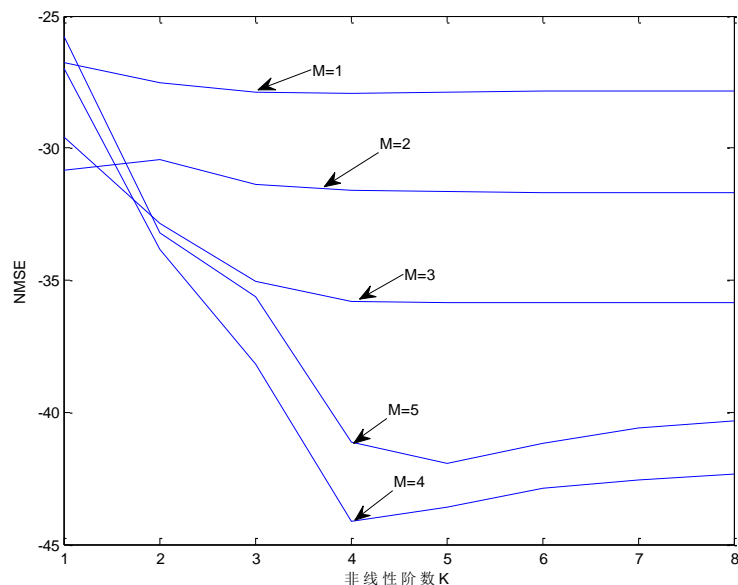


图 4.19 不同记忆深度下 NMSE 随着非线性阶数变化曲线 (LMS)

由图 4.19 可以看出, 当选取非线性阶数为 4, 记忆深度为 4 时, g 无法取到 $g_{\max} = 9.605$, 因为此时预失真器的最大输出幅度为 0.7197, 而功率放大器允许输入的最大幅度为 0.7079, 不满足最大幅度约束, 因此需要减小 g , 通过遍历, 得到 g 最大可以达到 9.456, 此时预失真放大器的最大输出为 0.7061, 满足最大输入幅度约束条件, 系统性能最好, 这里此时 $\text{NMSE} = -44.1\text{dB}$, 结果图 4.20 如下:

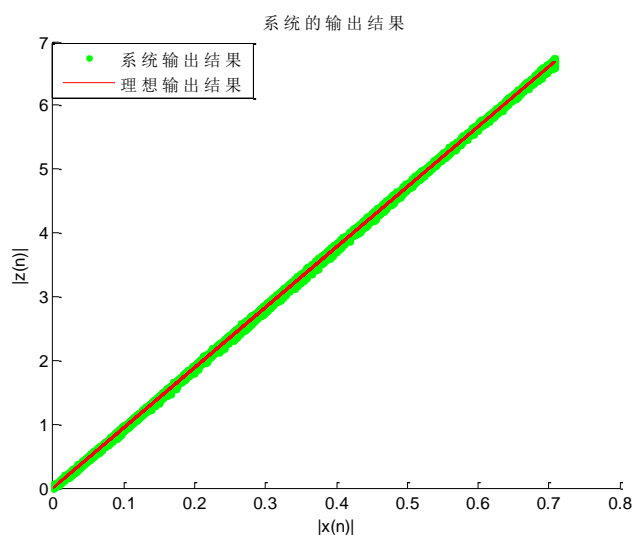


图 4.20 系统特性拟合图

4.5 问题三

利用直接法求输入信号、无预失真补偿的功率放大器输出信号、采用预失真补偿的功率放大器输出信号的功率谱密度, 即:

$$P_x(w) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jnw} \right|^2 \quad (4.33)$$

4.5.1 最小二乘估算解的系统性能

设置参数为有记忆非线性阶数 $K=3$ ，记忆深度 $M=5$ 条件下：利用最小二乘估算分别得到，输入信号的功率谱密度，如图 4.21 所示；无预失真补偿的功率放大器输出信号功率谱密度，如图 4.22 所示；以及采用预失真补偿的功率放大器输出信号的功率谱密度，如图 4.23 所示。

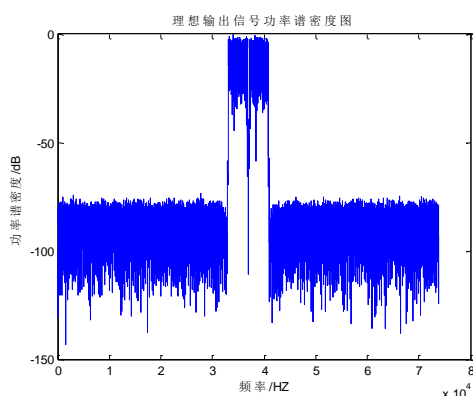


图 4.21 输入信号的功率谱密度图

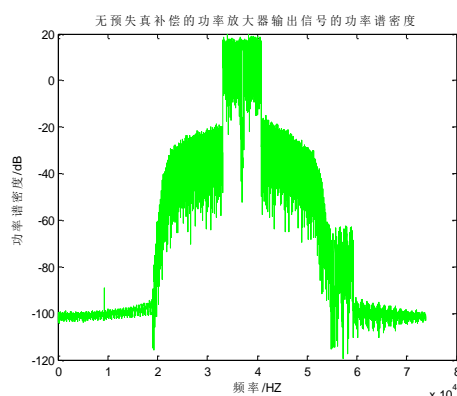


图 4.22 无预失真补偿的输出功率谱密度图

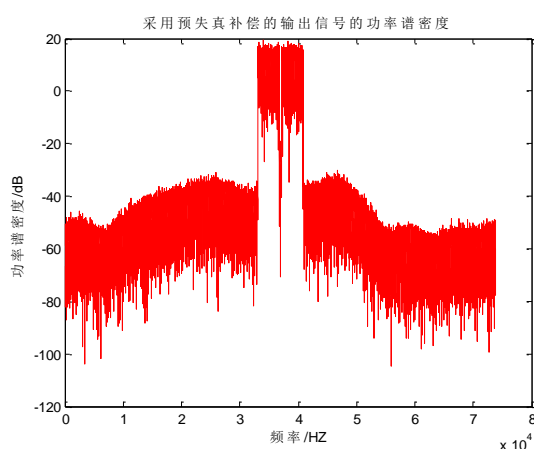


图 4.23 采用预失真补偿的输出信号的功率谱密度图

由图 4.21、图 4.22、图 4.23 可以观察到，用预失真补偿的输出信号的功率谱密度图，明显比无预失真补偿的输出的功率谱密度的带外频谱泄露的少，如表 1 所示：

表 1 最小二乘不同信号的 ACPR 比较

信号	ACPR (dB)
输入信号	-78.5
无预失真	-37.3
有预失真	-52.2

相邻信道功率比（Adjacent Channel Power Ratio, ACPR）是表示信道的带外失真的参数，趋向负无穷性能越好。由表 1 可以看出输入信号经过预失真系统后的 ACPR 变大，说明产生了信道的带外失真；采用预失真补偿的功率放大器输出信号的 ACPR 小于无预失真补偿的功率放大器输出信号的 ACPR，说明预失真器起到了维持信号线性输出的作用，降低了信道的带外失真。

4.5.2 自适应模型的系统性能

设置参数为有记忆非线性阶数 $K=4$ ，记忆深度 $M=4$ 条件下：利用自适应模型分别得到，输入信号的功率谱密度，如图 4.24 所示；无预失真补偿的功率放大器输出信号功率谱密度，如图 4.25 所示；以及采用预失真补偿的功率放大器输出信号的功率谱密度，如图 4.26 所示。

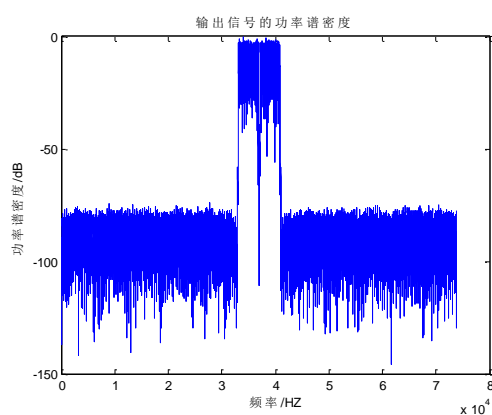


图 4.24 输入信号的功率谱密度图

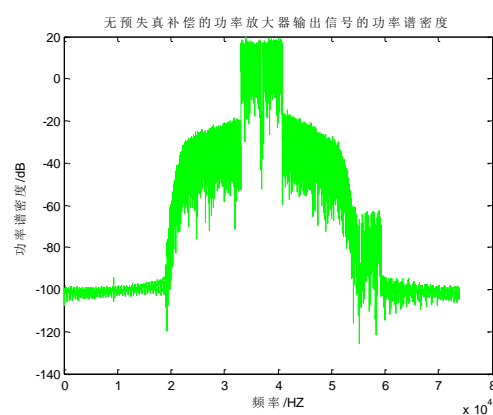


图 4.25 无预失真补偿输出功率谱密度

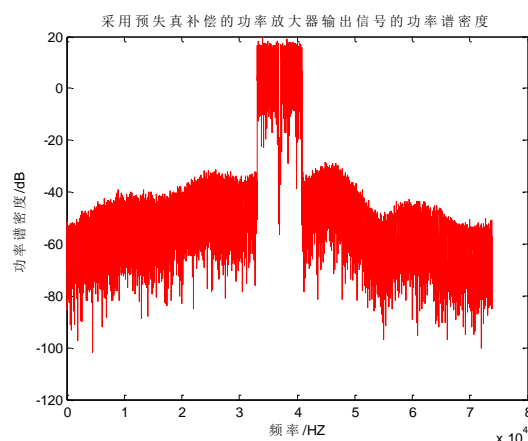


图 4.26 采用预失真补偿输出功率谱密度图

由图 4.24、图 4.25、图 4.26 可以观察到，用预失真补偿的输出信号的功率谱密度图，明显比无预失真补偿的输出的功率谱密度的带外频谱泄露的少。

表 2 LMS 算法不同信号的 ACPR 比较

信号	ACPR (dB)
输入信号	-78.5
无预失真	-37.3
有预失真	-50.1

在该模型下采用预失真补偿的功率放大器输出信号的 ACPR=-50.0881dB，说明了自适应模型下得到的预失真器同样可以起到线性化的作用，但相比于最小二乘估计模型的效果稍差。

五、 模型评价

建模和分析记忆非线性系统时，最常用的方法是使用 Volterra 级数模型，也可用于预失真设计。原则上 Volterra 级数^[9]精确度高，其缺点是所设计的预失真器实现起来复杂度高，模型提取算法运算量大。在实际应用中大多数的功率放大器需要采用高阶 Volterra 级数预失真器来校正其非线性，所需系数数量巨大，这使得该缺点更加突出，因此，除模型阶数较低的情况下，该模型在仿真中的应用很有限。记忆多项式模型是 Volterra 模型的一种特殊形式综合考虑，记忆多项式模型具有系数提取方法简单、系数数量少等优点。

自适应预失真系统一般分为直接学习结构和间接学习结构。直接学习结构需要首先辨识出功放的模型，再求其逆模型作为预失真器的参数。当功放的当功放模型比较简单时，这种方法是可行的。但实际的记忆功放一般都是高阶非线性系统，辨识其逆模型很困难，计算很复杂。预失真器参数的自适应调整困难。当放大器特性发生变化时，系统性能会迅速下降。间接学习法的自适应算法中，包括最小均方自适应(LMS)算法、最小二乘算法、递归最小二乘法(RLS算法)和 QR-RLS 算法。但是 RLS 类算法的计算复杂度却远大于 LMS 算法。LMS 算法实现起来很简单，计算复杂度很小。但是 LMS 算法收敛速度慢，算法稳定性不够好，但其他算法运算复杂较高。

参考文献

- [1] 侣秀杰.记忆功率放大器数字预失真技术研究[D].大连：大连理工大学，2012
- [2] 于翠萍.宽带功率放大器预失真技术的研究[D].北京：北京邮电大学，2009
- [3] 钱业青，刘富强.记忆非线性功率放大器的高效预失真[J].计算机工程与应用，2007,43（2）
- [4] 王胜水.数字预失真放大器中的自适应算法研究[D].成都：电子科技大学，2009
- [5] 甘璐.宽带射频功率放大器的数字预失真技术研究[D].成都：电子科技大学，2009
- [6] John Tsimbinos, Identification and Compensation of Nonlinear Distortion, PhD Dissertation, School of Electronic Engineering, University Of South Australia,

Adelaide, February 1995.

[7] Tianhai Wang, et al. Volterra-Mapping-Based Behavioral Modeling of Nonlinear Circuits and Systems for High Frequencies. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 2003,51(5):1433-1440

[8] Raviv Raich, et al. Orthogonal Polynomials for Power Amplifier Modeling and Predistorter Design. IEEE Trans. Vehicular technology, 2004,53(5):1468-1479

[9] Dennis R.Morgan et al. A Generalized Memory Polynomial Model for Digital Predistortion of RF Power Amplifiers. IEEE Trans. Signal Processing , 2006,54(10):3852-3860