

医院管理系统中排队模型的优化决策分析

韩新焕 朱萌纤 吴 静

(南京医科大学数学与计算机教研室 南京 210029)

摘 要: 通过对排队论模型的分析,确定合理的门诊医疗资源配置,为医院经营管理者应用排队论提高医疗服务提供了参考。

关键词: 排队论; 随机模型; 医院管理

医院是一个复杂的系统,病人从挂号、就诊、划价、取药每一个服务机构,当某项服务的现有需求超过提供该服务的现有能力时,排队现象就会发生,由于患者到达的时间和诊治患者所需时间的随机性,可控性小,排队几乎是不可避免的,当诊室不足时,常出现患者排队等待时间太长,患者满意度下降,医务人员工作过于忙乱,易出差错引起医患纠纷,对患者和社会都会带来不良影响。因此如何合理科学安排医护人员及其医疗设备,使医院不会盲目增加医生和设备造成不必要的空闲,形成资源浪费,又使患者排队等待时间尽可能减少,如何在这两者之间取得平衡,以便提高服务质量,降低服务费用,这是现代医院管理者必须面对的课题。

排队论模型(queueing theory model),是通过数学方法定量地、对一个客观复杂的排队系统的结构和行为进行动态模拟研究,科学、准确地描述排队系统的概率规律,排队论也是运筹学的一个重要的分支学科^[1,2]。在医院管理中,如果在排队论的基础上,对医院门诊、诊室的排队系统的结构和行为进行科学的模拟和系统的研究。从而对诊室和医生安排进行最优设计,以获得反映其系统本质特征的数量指标结果,进行预测、分析或评价,最大限度地满足患者及其家属的需求,将有效避免资源浪费。

1 随机模型

1.1 系统描述

以医院门诊为研究对象,它有如下特征:

① 输入过程:患者的到达是相互独立,相继到达的时间间隔是随机的;一定时间的到达服从 Poisson 分布。

② 排队规则:从先到先服务,且为等待制,即患者到达时所有诊室和医生都没有空闲,他们就要排队等待。

③ 服务时间:患者诊治时间是相互独立的,服从负指数分布。

④ 服务窗口:多服务台,C 个服务台并联排列,各服务台独立工作。

1.2 模型假设及建立

假设患者平均到达率为 λ ,单个服务台的平均服务率(表示单位时间被服务完的患者数)为 μ ,整个服务机构的平均服

务率 $c\mu$;系统的服务强度 $\rho = \lambda/c\mu < 1$ 时才不会排成无限的队列(服务台的平均利用率), $p_n(c)$ 为 C 个服务台任意时刻系统中有 n 个患者的概率;当到达率为 λ ,服务率为 $c\mu$ 的生灭过程达到稳态时,可得:

$$p_0(c) = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k + \frac{1}{c!} \frac{1}{(1-\rho)} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \right]^{-1} \quad (1)$$

$$p_n(c) = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0(c), & n=1,2,\dots,c \\ \frac{1}{c!} \frac{1}{c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0(c), & n=c+1,\dots \end{cases} \quad (2)$$

当系统达到平衡状态时,每个患者在系统中等待时间 W 的均值为:

$$E(W) = \frac{p_n(c)}{c\mu(1-\rho)^2} = \frac{n\mu}{n! (n\mu-\lambda)^2} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0(c) \quad (3)$$

$$\text{排队逗留的人数 } L_s = L_q + c\rho = \frac{1}{c!} \frac{(c\rho)^c \rho}{(1-\rho)^2} p_0 + \frac{\lambda}{\mu} \quad (4)$$

1.3 排队系统的最优化

在排队系统中,患者希望服务台越多、服务效率越高、逗留时间越短越好,使自己的损失达最小,为此医院就要增加医生和设备,而医院也不可能无限投入。为此就需要优化设计,其目的就是使患者损失费用和医院服务成本之和达到最小。假设服务台的个数为 c, c_s 为每个服务台单位时间服务台的成本费, c_w 为每个患者在系统中逗留单位时间的费用,总成本 Z(c) (单位时间总费用的期望值,它是服务台的个数为 c 的函数),则目标函数 $\min z(c) = C_s c + C_w L_s(c)$, 其中 L_s 为逗留的人数(公式(4)), c 只能取整数,设 c^* 是使目标函数 c 取最小值的点, c^* 满足

$$z(c^*-1) \leq z(c^*) = c_s c^* + c_w L_s(c^*) \leq z(c^*+1), L_s = L_s(c)$$

$$\text{化简得 } L_s(c^*) - L_s(c^*+1) \leq \frac{c_s}{c_w} \leq L_s(c^*-1) - L_s(c^*) \quad (5)$$

通过计算机模拟依次算出 $L_s(1), L_s(2), L_s(3), \dots$ 相邻两项之差,看常数落在哪两者之间,从而确定使患者损失费用和医院服务成本之和达到最优化服务台个数 c 的最优解 C^* 。

1.4 关于服务方案问题优化

当患者平均到达率上升引起服务强度增加致使平均队长 L 太大,甚至由于服务强度 $\rho > 1$ 使队长趋向无限时,在平均服

务率不变的情况下就只能增加服务台。下面讨论有2个服务台且他们的平均服务率相等的情况。

2个服务台的排队服务有两种形式分别如下两图所示:

图1只排一个队是一个M/M/2模型,图2排两个队,且入队后不能换队,是2个M/M/1模型。

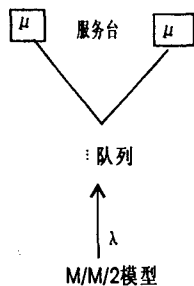


图1

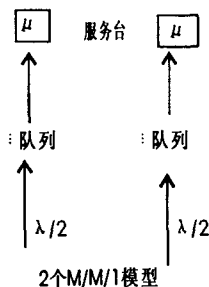


图2

我们可以知道,2个服务台的两种服务形式平均队长 L ,等待时间 W 之比为:

$$\frac{2L_1}{L_2} = \frac{W_1}{W_2} = 1 + \rho_2 \quad (\rho_2 = \frac{\lambda}{2\mu} < 1)$$

就人们最关心的等待时间而言有 $1 < \frac{W_1}{W_2} < 2$,而当 $\rho_2 = \rho/2$ ($\rho = \lambda/\mu$)较大时,M/M/2模型的形式比2个M/M/1模型节省较多的等待时间^[3]。

同理可证明:在有多多个并列服务台的排队系统中,排成单队比排成并列多队的方案具有显著的优越性。对于设置多个服务员的随机过程,如果仅从等待时间角度考虑应该让患者只排一个队。

2 实例分析

某医院手术室为掌握随机服务情况,统计了100h病人就诊和完成手术的数据,如下表所示:

一小时到达 的病人数 n	n 出现的 频率 f_n	一病人的的手 术时间 τ (h)	τ 出现的 频率 g_τ
0	10	0~0.2	38
1	28	0.2~0.4	25
2	29	0.4~0.6	17
3	16	0.6~0.8	9
4	10	0.8~1.0	6
5	6	1.0~1.2	5
6以上	1	1.2以上	1
合计	100	合计	100

① 计算相应数量指标;

② 如果该医院还想建一个规模相同的手术室,问是否合理?

借助 MATLAB 软件:

1) 首先算出每h病人平均到达率 $\lambda = \sum n f_n / 100 = 210 / 100 = 2.1$ (h/人),手术平均时间 $1/\mu = \sum \tau f_\tau / 100 = 40 / 100 = 0.4$ (人/h),每小时完成手术人数 $\mu = 1/0.4 = 2.5$;用拟合优度的 $\chi^2 = \sum_{n=0}^6 \frac{(f_n - 100 p_n)^2}{100 p_n}$ 检验平均到达率 $\lambda = 2.1$ 是否符合

Poisson 分布;

算出 $\chi^2 = 3.06$,取 $\alpha = 0.05$ 得临界值 $\chi_{\alpha}^2 = 11$,因为 $\chi_{\alpha}^2 = 11 > \chi^2 = 3.06$,所以接受到达率服从参数 $\lambda = 2.1$ 的Poisson分布。同理可检验手术时间服从参数2.5的指数分布。用以上公式排队系统的主要数量指标如下;

系统中病人数 5.25 (人)	排队等待病人数 4.41 (人)
病人逗留时间 2.5 (h)	排队等待时间 2.1 (h)
服务强度 $\rho = \lambda/\mu = 0.84$	病人时间损失系数 5.25
手术室空闲时间的概率 0.16	繁忙时间的概率 $p_n = 0.84$

② 计算 服务强度 $\rho = \lambda/c\mu = 0.42 < 1$ 增加一个规模相同的手术室后的数量指标

系统中病人数 1.02 (人)	排队等待病人数 0.18 (人)
病人逗留时间 0.48 (h)	排队等待时间 0.08 (h)
两个手术室空闲时间的概率 0.4	只有一个手术室空闲的概率 $p_1 = 0.34$
病人不必等待的概率 0.74	病人必须等待的概率 0.26

根据以上数据指标可得:科室只有一个手术室病人等待时间是手术时间的5.25倍;手术室84%的时间是繁忙的,只有16%是空闲的。若再增加一个手术室被利用的概率是42%,空闲的概率是58%,两个手术室空闲时间的概率0.4,两个手术室只有一个空闲的概率34%。根据以上数据决策者可决定是否增加一个手术室,从而为管理者提供决策支持的工具。

3 结语

到医院就诊排队是一种司空见惯的现象,由于患者到达和医疗服务时间的随机性,患者来源数量在理论上是无限的,而医疗资源是有限的,如何在有限资源配置下,利用上述排队模型理论和计算机模拟,结合患者的服务记录获得的相关数据,对其做出定性、定量的数量指标,进而进行预测、分析和评价,通过优化设计,实施动态管理,根据医院的实力,完善设施和配备,合理增加医护人员数量,提高医生的诊疗技术水平,有效缩短平均诊疗时间及其波动程度,提高效率,缩短等候时间,统一诊疗程序,为患者排忧解难。显然,应用排队论,一方面可以有效地解决医院服务系统中人员和设备的配置问题,为医院管理提供可靠的决策依据;另一方面通过系统优化,找出患者与医院两者之间的平衡点,既减少患者排队等待时间,又不浪费医院人力物力,从而获取最大的社会效益和经济效益。

参 考 文 献

- 1 韩伯棠. 管理运筹学. 北京: 高等教育出版社, 2005, 307~322.
- 2 姜启源. 数学模型. 北京: 高等教育出版社, 1993, 456~467.
- 3 边馥萍, 侯文华, 梁冯珍. 数学模型方法与算法. 北京: 高等教育出版社, 2005, 262~276.

COX 回归模型的样本含量的计算方法及软件实现

徐 英 骆福添*

(广东药学院卫生统计学教研室 广州 510310)

摘 要: 目前生存分析中 COX 回归模型到底需要多少样本量往往靠经验法来估计。旨在介绍并推广生存分析中 COX 回归模型所需样本量的计算公式及其目前可以实现该计算方法的软件,并通过实例说明了该公式的应用,以期提高今后研究工作的效率。

关键词: 生存分析; COX 回归模型; 样本量; 统计软件

COX 回归模型在生存分析中应用非常广泛,然而,关于应用该模型到底需要多少样本含量的问题一直未得到很好地解决。主要原因就是生存分析中往往涉及到数据删失的问题,如果不考虑删失数据,则可以利用率的比较所需样本量的计算公式。但是,简单的忽略这部分数据,往往会造成信息的损失。如果考虑删失数据,则样本量的计算又变得非常复杂,因此,直到今天,这个问题依然是国内外统计学者研究的热点之一。本研究仅介绍其中一种较为成熟的计算方法及其相应的实现软件,并通过实例说明该公式应该逐渐被研究者们广泛应用,从而达到提高研究效率的目的。

1 公式介绍

以往,对于 COX 回归模型所需的样本量往往凭经验去估计,即至少需要相当于协变量个数 10~15 倍的阳性结局事件。1983 年, Schoenfeld 在 Biometrics 杂志上撰文,提出了一个计算比例风险模型样本含量的公式^[1,2]:

$$D = (Z_{1-\alpha} + Z_{\beta})^2 [P(1-P) \log \Delta]^2$$

这里, D 是指发生阳性结局的总人数, P 是指分配到第一

治疗组人数所占的比例。 $\log \Delta$ 是指风险比的对数。该公式主要是用来计算随机化分组研究的设计所需的样本量,适用于二分类自变量。同时,当考虑其他协变量对生存时间的影响时,则要求主要感兴趣的研究变量与其他变量间相互独立。

然而,在实际的工作当中,变量之间有时并不能满足独立性。因此,2000 年, Hsieh 和 Lavori 在 Controlled Clinical Trials 上将 Schoenfeld 的计算公式进行了扩展^[3],现介绍如下:

$$N = \frac{(Z_{1-\alpha/2} + Z_{1-\beta})^2}{P(1-R^2)\sigma^2 B^2}$$

等号左边, N 表示所需要的样本含量。

等号右边 $Z_{1-\alpha/2}$, Z_{β} 表示给定检验水准和检验功效时的 z 界值; P 表示整个研究期间阳性结局事件的发生率; B 表示对数风险比,即 $\log \Delta$; σ^2 表示感兴趣的研究因素 X_1 的方差,这里假定 X_1 服从正态分布,对于非正态分布的 X_1 ,如二项分布,可通过 $p(1-p)$ 进行估计,这里, p 表示 X_1 取“0”或“1”的比例。与 Schoenfeld 的计算公式不同的是,该公式引入了“方差膨胀因子”(VIF),即 $1/(1-R^2)$ 。 R^2 表示 X_1 对其他协变量作回归分析时的确定系数,取值范围 0~1,当取值为“0”时,

The Optimum Analysis with Queuing Theory Model in Hospital Management

Han Xinhuan, et al

(Department of mathematics and computer, Nanjing Medical University, Nanjing 210029)

Abstract This article analysed queuing theory model and defined suitable medical resoume for outpatient services in order to receive best benefit. It offered reference that the hospital governors improve medical service with queuing theory.

Key words queuing theory; random model; hospital management