制动器试验台的计算机控制方法分析与设计

摘要

本文旨在研究制动器试验台的控制问题，通过对试验台模拟试验的分析推导，建立了驱动电流依赖于可观测量的数学模型，给出控制驱动电流的方法，并对所给方法进行评价和改进。

问题一，根据题述，把载荷在车辆平动时具有的能量等效地转化为试验台上飞轮和主轴等机构转动时具有的能量，结合刚体力学知识，求得问题一中等效的转动惯量为 $52\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$；

问题二，经过计算可知，能组成八种机械惯量，分别为 10、40、70、100、130、160、190、220 $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$，对应于问题一中得到的等效转动惯量，需要用电动机补偿惯量为 $12\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$或$-18\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$；

问题三，本文依据能量守恒定律对制动过程进行分析，建立了一个理想条件下的基本模型，并利用该模型求出题述条件下的驱动电流为$174.8252\mathrm{A}$或$-262.2378\mathrm{A}$，两个取值分别对应于问题二求得的两个补偿惯量值；

问题四，能量误差的大小是评价控制方法优劣的一个重要指标，利用所给数据求出能量误差为$2.9461\times10^3\mathrm{J}$，相对能量误差为$5.64\%$，可以看出该方法误差较大；

问题五，我们利用第三问导出的基本模型，推出了依据前一时间段观测到的瞬时扭矩设计本时间段电流值的计算机控制方法，经过计算机模拟分析发现该方法具有明显的时延误差，其相对能量误差为0.219%，为了减弱该误差的影响，我们引入反馈机制加以改进，使相对能量误差降低到了0.089%；

问题六，经过对问题五中的方法分析发现，反馈虽然可以在一定程度上减弱时延误差，但却无法从根本上解决该方法内在缺陷，因此本文给出了基于 Laplace 变换设计的新方法。此方法虽然也用前一时间段的数据估计此时间段的电流值，但是，经过严格证明与计算机模拟发现：在模型阶数 N 足够大的情况下，能量误差近似为零！

最后，我们给出了多目标规划模型和基于非线性方程的迭代求解模型这两个拓展模型，并对各模型的优缺点进行了分析。

关键字：刚体力学 制动器 拉普拉斯变换 时延误差 过程控制

目录

1．问题重述与分析

制动器的设计是车辆设计中最重要的环节之一，直接影响着人身和车辆的安全，而制动器性能的测试是为了检验设计优劣的不可或缺的一部分。通过分析发现，问题的核心在于：如何使得制动过程中电动机尽量精确地补偿由于机械惯量不足而缺少的能量，以满足模拟实验的原则，也就是解决如何控制电动机的驱动电流问题。

对于问题一和问题二，根据题目中所给条件利用刚体力学知识直接求解即可。对于问题三，利用能的转化与守恒定律建立模型求解，然后利用该模型求得所给具体情况下的驱动电流值。评价控制方法优劣的一个重要指标是能量误差的大小，据此可以对问题四所述控制方法得到的结果进行评价。对于问题五，可以依据问题三所建的模型，给出依据前一个时间段观测到的瞬时转速与/或瞬时扭矩，设计本时间段电流值的计算机控制方法，并进行计算机模拟，可利用与解决问题四同样的方法进行评价。对于问题六，应该在问题五所给控制方法的基础上进一步分析，给出一个尽量完善的计算机控制方法。

2. 基本假设

1. 路试时轮胎与地面的摩擦力为无穷大，因此轮胎与地面无滑动；
2. 模拟实验中，主轴的角速度与车轮的角速度始终一致；
3. 车轮及主轴的角速度连续变化；
4. 试验台采用的电动机的驱动电流与其产生的扭矩成正比；
5. 不考虑观测误差、随机误差和连续问题离散化所产生的误差。

3．符号说明

G	制动时车轮承受的载荷
g	重力加速度，取 $9.8m/s^2$
t_0	施加制动的初始时刻
t_e	施加制动的末时刻
v	车轮的线速度
ω	车轮的角速度
r	车轮的滚动半径
J	等效转动惯量大小
J_0	基础转动惯量大小
J'	机械转动惯量大小
r_{i1}、r_{i2}	第i个飞轮的内、外半径
ρ	钢材密度
M_z	制动力产生的扭矩
M_i	电动机驱动电流产生的扭矩
β	制动角减速度
i	电动机驱动电流大小
以上各量的单位均取国际单位，其他符号在使用时说明。	

4. 模型的建立与求解

4.1　问题一

记m为路试车辆制动时承受的载荷对应的质量，由牛顿第二定律可得，

$$G = mg \tag{1}$$

由于模拟试验中认为主轴的角速度和飞轮的角速度始终一致，且认为轮胎与地面无滑动，有

$$v = \omega r \tag{2}$$

又根据题述可知，载荷在车辆平动时具有的能量等效转化为试验台上飞轮和主轴等机构转动时具有的能量，故

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 \tag{3}$$

由以上三个等式解得：$J = \frac{G}{g}r^2 = 52\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$.

即等效的转动惯量为$52\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$.

4.2　问题二

4.2.1　可能组成的机械惯量

对于内、外半径分别为r_{i1}、r_{i2}，厚度为h_i的飞轮，其对应转动惯量为

$$J_i = \int_{r_{i1}}^{r_{i2}} r^2 dm = \int_{r_{i1}}^{r_{i2}} r^2 \rho h_i 2\pi r dr = \frac{1}{2}\pi\rho h_i (r_{i2}^4 - r_{i1}^4)，i = 1,2,3 \tag{4}$$

据此可以计算出三个飞轮相应的转动惯量依次为：

$J_1 = 30\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$，$J_2 = 60\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$，$J_3 = 120\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$.

由于各飞轮均有取用或不取用两种情况，故共有$2^3 = 8$种可能的取法，且检验发现相应的 8 个机械惯量取值之间无重复，罗列如下：

10，40，70，100，130，160，190，220 $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$.

4.2.2　电动机补偿惯量

对于问题一中得到的等效转动惯量$52\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$，设电动机需要补偿惯量大小为$\Delta J$，则有

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \cdot J_i + J_0 + \Delta J = J \tag{5}$$

其中$x_i \in \{0，1\}$，$x_i = 1$表示选用了第i个飞轮，$x_i = 0$表示未选用.

显然，有

$$x_1 = 1, x_2、x_3 = 0，\Delta J = 12\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$$

或

$$x_2 = 1, x_1、x_3 = 0，\Delta J = -18\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2.$$

即电动机补偿惯量为$12\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$或$-18\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$.

4.3　问题三

4.3.1　基于可观测量的驱动电流控制基本模型

1)制动角减速度的确定

设施加制动后，在时间段$[t, t+\Delta t]$内，车轮角速度亦即模拟实验中主轴的角速度由ω变为$\omega-\Delta\omega$，主轴转过的角度为$\Delta\theta$。由能量守恒定律[2]可得:

$$-M_z\Delta\theta = \frac{1}{2}J(\omega-\Delta\omega)^2 - \frac{1}{2}J\omega^2 \tag{6}$$

由假设，车轮的角速度连续变化可知，

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\theta = 0$$
$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\omega = 0$$

$\Delta t \to 0$时，可略去（6）式中$\Delta\omega$的二次项，且$[t, t+\Delta t]$时间段内制动角减速度可认为恒等于β，从而得

$$M_z\Delta\theta = J\omega\Delta\omega = J\omega\beta\Delta t \tag{7}$$

故瞬时制动角减速度为

$$\beta = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{M_z\Delta\theta}{J\omega\Delta t} = \frac{M_z}{J\omega}\omega = \frac{M_z}{J} \tag{8}$$

2）驱动电流扭矩的大小

对于制动器模拟试验而言，记J'为机械惯量的大小，由能量守恒定律可得：

$$M_i\Delta\theta - M_z\Delta\theta = \frac{1}{2}J'(\omega-\Delta\omega)^2 - \frac{1}{2}J'\omega^2 \tag{9}$$

将(7)式代入(9)，等式右边展开，得

$$M_i\Delta\theta - J\omega\beta\Delta t = -J'\omega\Delta\omega + \frac{1}{2}J'(\Delta\omega)^2$$

同 1)，略去$\Delta\omega$的二次项，等式两边同除以Δt，得

$$M_i\frac{\Delta\theta}{\Delta t} - J\omega\beta = -J'\omega\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

两边同时取极限$\Delta t \to 0$，得驱动电流产生的扭矩为

$$M_i = (J-J')\beta \tag{10}$$

3）驱动电流的控制模型建立

由题述可知：

$$i = K\cdot M_i \tag{11}$$

其中$K = 1.5A/N\cdot m$，为比例系数。

由(7)、(9)、(10）可得，驱动电流为

$$i = \frac{K(J-J')}{J}M_z \tag{12}$$

其中K、J、J'为试验开始前可确定的已知量，M_z为可观测量。

4.3.2 驱动电流的计算

记制动初速度为v_0，制动时间为T, 由于制动末速度为 0，制动角减速度β为常数，故

$$\beta = \frac{v_0}{r\cdot T} \tag{13}$$

将上式代入（9），与（10）联立求得

$$i = \frac{K(J-J')v_0}{r\cdot T} = 174.8252A 或 -262.2378A$$

以上两个取值分别对应电动机补偿惯量为$12\ kg\cdot m^2$或$-18\ kg\cdot m^2$情况下的电流，其中负号表示电动机补偿惯量为负。

4.4 问题四

记施加制动初始时刻为t_0，末时刻为t_e，汽车初速度为v_0，末速度为v_e,载荷为m，主轴初转速为n_0，末转速为n_e，初角速度为ω_0，末角速度为ω_e,ε_E为相对能量误差，路试时制动器在制动过程中消耗能量为E_L，相应的实验台上制动器在制动过程中消耗的能量为E_S,路试时轮胎与地面无滑动，因此地面与轮胎的摩擦力不做功，汽车动能的减少量等于制动器消耗的能量，即：

$$E_L = \frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{1}{2}m{v_e}^2 = \frac{1}{2}J{\omega_0}^2 - \frac{1}{2}J{\omega_e}^2 \tag{14}$$

设施加制动后，在时间段$[t, t+\Delta t]$内，模拟实验中主轴的角速度由$\omega(t)$变为$\omega(t+\Delta t)$，主轴转过的角度为$\Delta\theta$，由ω的连续性可得：

$$\Delta E_S = M_z(t)\Delta\theta = M_z(t)\omega(t)\Delta t$$

故

$$E_S = \sum_{k=0}^{N-1}\Delta E_S = \sum_{k=0}^{N-1} M_z(t_0 + k\Delta t)\omega(t_0 + k\Delta t)\Delta t \tag{15}$$

其中$N = (t_e - t_0)/\Delta t$，为制动过程的总时间段数；

利用 matlab 求解得到，能量绝对误差$\Delta E = |E_S - E_L| = 2.9461 \times 10^3 J$.

为了更好的反映出控制方法的优劣，这里同时计算出相对能量误差，为

$$\varepsilon_E = \frac{|E_S - E_L|}{E_L} \times 100\% = 5.64\% \tag{16}$$

由此可知，该方法误差较大。

4.5 问题五

4.5.1 基于可观测量的驱动电流控制离散模型

假设在所考虑的每一个小时间段（这里取$\Delta t = 0.01s$）内，制动扭矩M_z近似保持不变，因此可用$M_z(t-\Delta t)$替代$M_z(t)$对电动机驱动电流$i(t)$进行设计。根据问题三导出的数学模型（式 11），可取：

$$i(t) = \frac{K(J - J')}{J} M_z(t - \Delta t) \tag{17}$$

作为对本时间段电流的设计值。

4.5.2 驱动电流控制离散模型的计算机模拟测试

根据问题四所给瞬时扭矩M_z(单位：N.m)和瞬时转速n(单位：rpm)的数据，作出瞬时扭矩M_z、瞬时转速n在各时刻的取值变化图像，如图 1 所示。

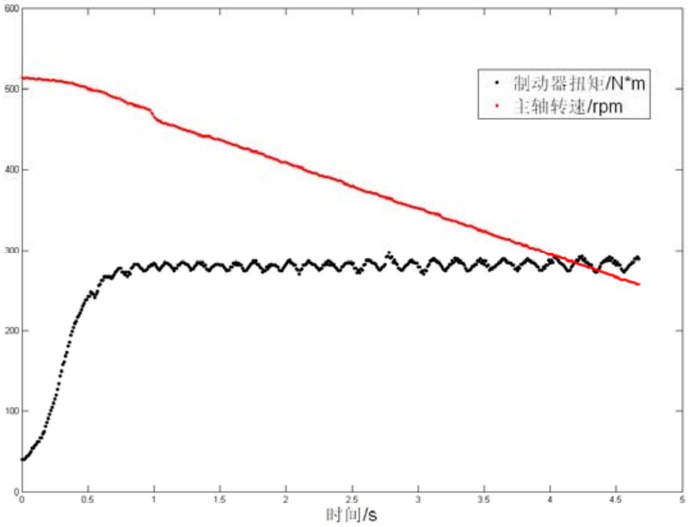

图 1 扭矩和转速随时间的变化关系图

观察图像可知，M_z大致呈"S"形变化趋势，可考虑函数$f(t)=\frac{C_1}{1+C_2e^{-\alpha_1 t}}$（Logistic 曲线）；而且，角速度ω越大，$M_z$波动峰峰值越小，即波动越平缓，同时，波动相位角与主轴的瞬时相位角θ有关，故取震荡因子：$1+(C_3+C_4\omega^{-\alpha_2})\cdot\cos^{\alpha_3}(\theta+\theta_0)$；同时近似认为制动角减速度恒定，取$\theta=\omega_0 t-\frac{1}{2}C_5t^2$. 综上，选择下式对制动扭矩进行拟合

$$M_z(t)=\frac{C_1}{1+C_2e^{-\alpha_1 t}}\left[1+(C_3+C_4\omega(t)^{-\alpha_2})\cdot\cos^{\alpha_3}\left(\omega_0 t-\frac{1}{2}C_5t^2+\theta_0\right)\right] \tag{18}$$

利用 matlab 软件进行最小二乘拟合，得到

$C_1=281.3$，$C_2=9.3267$，$\alpha_1=7.9131$，$C_3=-0.1070$，$C_4=0.5166$，$\alpha_2=0.7682$，$\omega_0=57.0383$，$C_5=6.3523$，$\theta_0=-8.7042$，α_3=1.0993.

拟合的残差方均值为：$\vartheta=8.3270$，说明拟合效果较好，如图 2 所示：

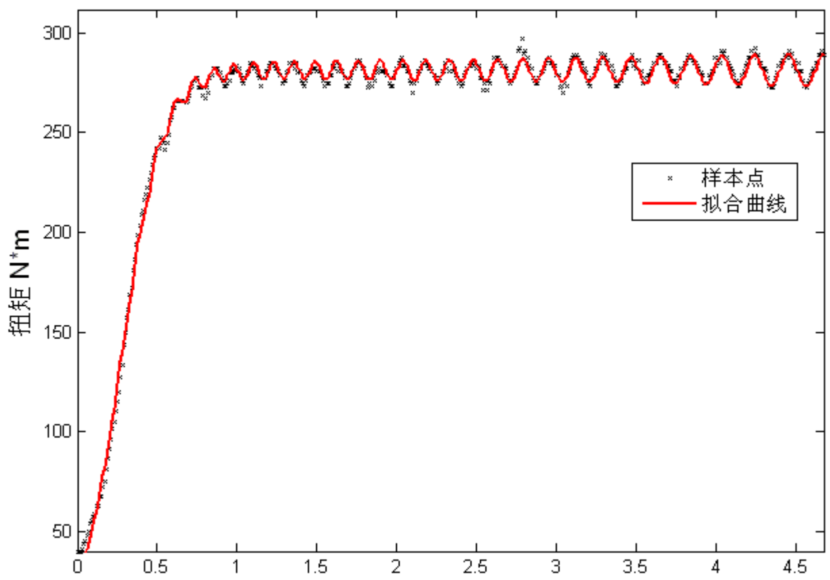

图 2 制动扭矩拟合图

又有 $$\omega(t)=\omega(t-\Delta t)-\frac{i(t)}{K(J-J')}\Delta t \quad (19)$$

为了检验方法的有效性，我们利用计算机模拟制动过程，算法如下：

Step1：初始化可观测量在初始时刻的值，令$t=\Delta t$；

Step2：由先前M_z的数据设计 t 时刻电动机电流$i(t)$，(特别地，对于 4.5.1 所建模型，有 $i(t)=\frac{K(J-J')}{J}M_z(t-\Delta t)$)；

Step3：由 $i(t)$和$\omega(t-\Delta t)$模拟计算 t 时刻角速度 $\omega(t)=\omega(t-\Delta t)-\frac{i(t)}{K(J-J')}\Delta t$；

Step4：由$\omega(t)$和t计算t时刻的制动器扭矩

$$M_z(t)=\frac{C_1}{1+C_2e^{-\alpha_1 t}}\left[1+\left(C_3+C_4\omega(t)^{-\alpha_2}\right)\cdot\cos^{\alpha_3}\left(\omega_0 t-\frac{1}{2}C_5t^2+\theta_0\right)\right]\ ;$$

Step5：若$\omega(t)\le\omega_e$(制动过程的末角速度),认为模拟结束，进入 Step6；否则修改$t=t+\Delta t$,并回到 Step2；

Step6：计算相对能量误差ε_E。

计算机模拟过程中数据产生次序的示意图如图 3 所示(仅给出 3 个相邻的时间段内的数据产生过程)。

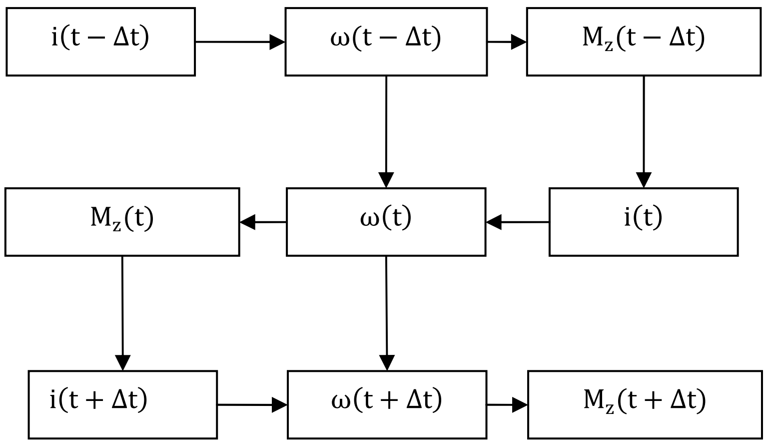

图 3 计算机模拟过程中数据产生流程

4.5.3 对 4.5.1 模型的分析与评价

1）能量误差计算

根据模拟结果计算，得：ε_E=0.219%，即 4.5.1 所建模型的相对能量误差比第四问的降低了一个数量级，说明本模型的控制方法明显优于问题四的方法。

2）稳定性分析：使用多组模拟的制动过程的初始值，得到以下结果：

表 1 不同初始值下的模拟结果

扭矩 N·m	初始转速 rpm	相对能量误差
40	514.33	0.2193%
80	514.33	0.2192%
120	514.33	0.2191%
40	400	0.3769%
40	500	0.2310%
40	600	0.1641%
40	700	0.1272%

从上表可看出，4.5.1 模型的稳定性较高，尤其是对初始扭矩的稳定性。

3）误差分析：

由 4.3.1 可知，在满足模拟实验原则的理想情况下，约定任意时刻 t，电动机驱动电流的理想值为$i(t)$，设计值为$\bar{i}(t)$，有：

$$i(t) = \frac{K(J-J')}{J} M_z(t) \tag{20}$$

记$K_1 = \frac{K(J-J')}{J}$，并对上式两端作 Laplace 变换，

$$\mathcal{L}[i(t)] = K_1 \mathcal{L}[M_z(t)]$$

4.5.1 中我们用$M_z(t-\Delta t)$替代$M_z(t)$对电动机驱动电流$i(t)$进行估计：

$$\bar{i}(t) = \frac{K(J-J')}{J} M_z(t-\Delta t)$$

对上式两端作 Laplace 变换，

$$\mathcal{L}[\bar{i}(t)] = K_1 \mathcal{L}[M_z(t)] e^{-\Delta t \cdot s}$$

可见，$i(t)$的拉氏变换$\mathcal{L}[i(t)]$与其设计值$\bar{i}(t)$的拉氏变换$\mathcal{L}[\bar{i}(t)]$恰好相差一个时移因子$e^{-\Delta t \cdot s}$，因此$\bar{i}(t)$有时滞性，这是本模型中影响相对能量误差ε_E的最主要因素。由图 4 可以看出，时延长度恰好为Δt，与理论分析一致。

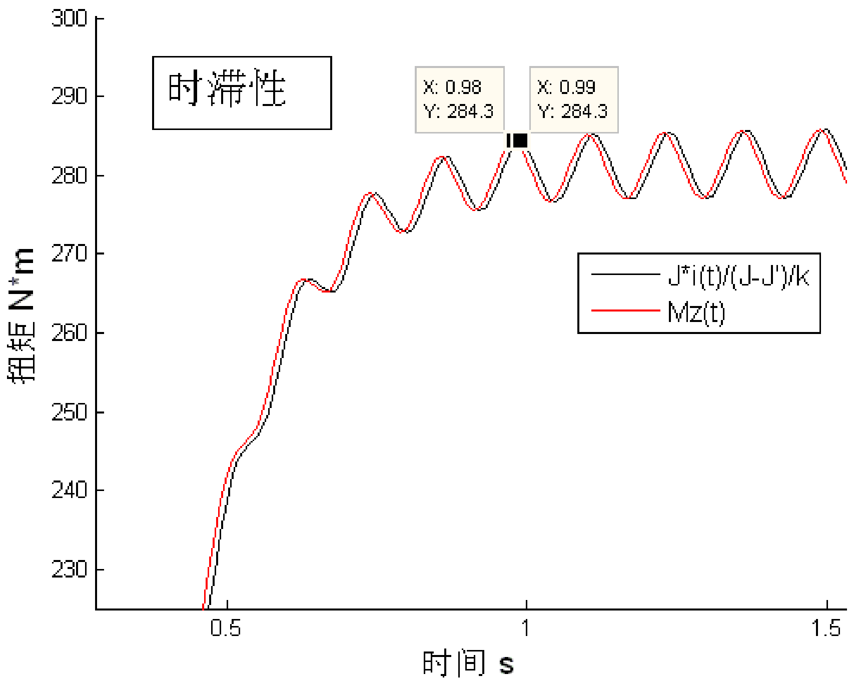

图 4　时滞性曲线

本模型产生时延误差的根本原因就在于模型的构建：假设每一个小时间段内制动扭矩M_z近似保持不变，于是使用$M_z(t-\Delta t)$替代$M_z(t)$对电动机驱动电流$i(t)$进行了设计，导致时移因子$e^{-\Delta t \cdot s}$的引入。

4.5.4　引入反馈机制的驱动电流控制改进模型

由于时延误差是本模型中影响相对能量误差ε_E的最主要因素，为了减小时延误差，我们引入反馈机制，以 t 时刻驱动电流$\bar{i}(t)$与其理想值$i(t)$的偏差的某种近似作为反馈信

号，使得$\bar{i}(t+\Delta t)$与$i(t+\Delta t)$的偏差减小。由于试验中$\bar{i}(t) \propto M_i(t)$， $i(t) \propto M_z(t)$，于是我们取$\left(\frac{(J-J')M_z(t)}{J \cdot M_i(t)}\right)^{\mu}$作为$\bar{i}(t)$与其理想值$i(t)$的偏差的近似。具体反馈结构图如图 5 所示，其中虚线框内是反馈环路。

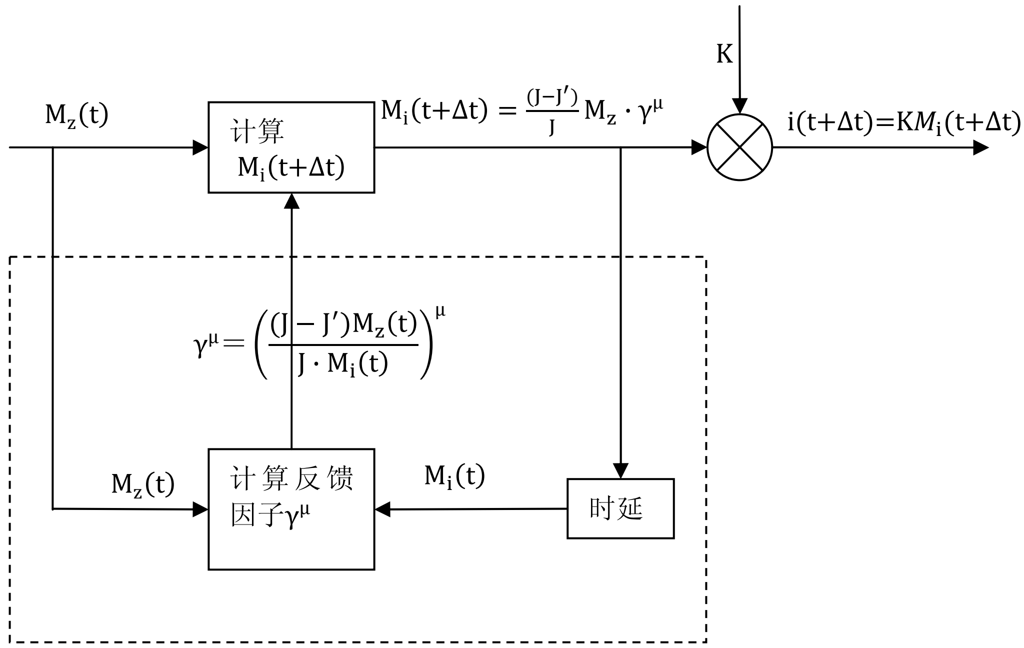

图 5 反馈结构图

其中

$$i(t+\Delta t) = k\frac{(J-J')}{J} M_z(t) \cdot \gamma^{\mu} = k\left(\frac{(J-J') \cdot M_z(t)}{J}\right)^{\mu+1} \cdot \frac{1}{(M_i(t))^{\mu}}$$

计算机模拟结果表明，与未加反馈机制的电流值控制方法相比，加入反馈机制之后，相对能量误差大大减小。反馈系数（记为μ）越大，能量误差ε_E越小，如表 2 所示。

表 2 反馈系数和能量误差之间的变化关系

反馈系数μ	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	1.0
相对能量误差ε_E	0.120%	0.111%	0.102%	0.095%	0.091%	0.077%

但是，根据反馈理论[3]可知，反馈系数过大时，闭环系统变得不稳定，环路会出现自激振荡，违背了等式：

$$i(t) = \frac{K(J-J')}{J} M_z(t-\Delta t)$$

且反馈系数越大，电流振荡越明显，以至不可接受。鉴于此，本文取反馈系数μ=0.97，此时$\varepsilon_E = 0.089\%$，模拟结果如图 6 所示。

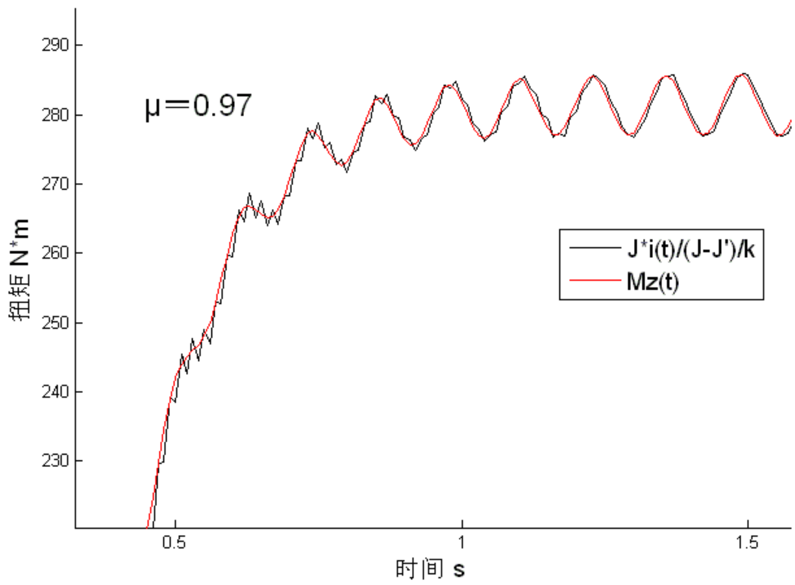

图 6 反馈系数为 0.97 时的模拟结果

从上图可以看出，曲线与散点的吻合程度比较高，说明由于引入反馈机制使得电流的时延被减弱。

4.6 问题六

4.6.1 问题五所得电流控制模型的不足

前文已经分析了 4.5.1 的模型中电动机驱动电流具有时延误差。4.5.2 的模型对其进行了改进，引入反馈机制，起到了一定的效果，但是其反馈机理（用$\bar{i}(t)$与$i(t)$的偏差调整$\bar{i}(t+\Delta t)$使其更接近$i(t+\Delta t)$）决定了其模型中的时延误差无法从根本上消除。鉴于此，下文利用信号与系统理论进行解答。

4.6.2 基于 Laplace 变换的电流控制模型

1）模型建立

前文中已经推导了时延误差产生的原因，即认为每一个小时间段内制动扭矩M_z近似保持不变，使用$M_z(t-\Delta t)$替代$M_z(t)$对电动机驱动电流$i(t)$进行设计。现在讨论如何消除时延误差。

由(20)式可知，理想情况下，对制动过程中的任意时刻 t,应有

$$i(t+\Delta t)=\frac{K(J-J')}{J}M_z(t+\Delta t)$$

记$K_1=\frac{K(J-J')}{J}$，并对上式两端作 Laplace 变换，

$$\mathcal{L}[i(t+\Delta t)]=K_1\mathcal{L}[M_z(t+\Delta t)]$$

得

$$\mathcal{L}[i(t)]e^{\Delta t\cdot s}=K_1\mathcal{L}[M_z(t)]e^{\Delta t\cdot s}=K_1\mathcal{L}[M_z(t)]\cdot\left[1+\Delta t\cdot s+\frac{1}{2!}(\Delta t\cdot s)^2+\frac{1}{3!}(\Delta t\cdot s)^3+\cdots\right] \tag{21}$$

对上式两端进行 Laplace 反变换，

$$i(t+\Delta t)=K_1\left(M_z(t)+\frac{dM_z(t)}{dt}\cdot\Delta t+\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2M_z(t)}{dt^2}\cdot(\Delta t)^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{d^3M_z(t)}{dt^3}\cdot(\Delta t)^3+\cdots\right)$$

进行离散化处理，依题意，令$t=n\Delta t$，上式化为

$$i((n+1)\Delta t)=K_1\left(M_z(n\Delta t)+\Delta M_z(n\Delta t)+\frac{1}{2!}\cdot\Delta^2M_z(n\Delta t)+\frac{1}{3!}\cdot\Delta^3M_z(n\Delta t)+\cdots\right)$$

将公式：$\Delta^kM_z(n\Delta t)=\sum_{m=0}^{k}(-1)^mC_k^m\,M_z((n-m)\Delta t)$代入，得电动机驱动电流：

$$i((n+1)\Delta t)=K_1\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^mC_k^m\,M_z((n-m)\Delta t)$$

$$=K_1\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^m}{m!\,(k-m)!}M_z((n-m)\Delta t)$$

其中 N 为前文（21）式$e^{\Delta t\cdot s}$的 Taylor 展开式的阶数。

2）系统框图

下图是驱动电流控制系统的系统框图

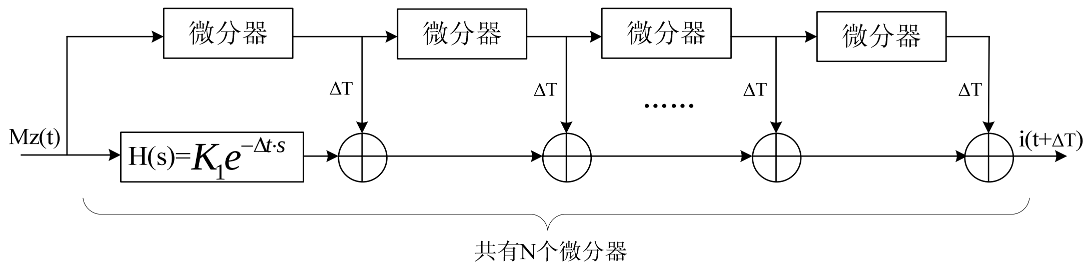

图 7　驱动电流控制系统的系统框图

3）误差分析

显然，N 越大，时延误差越小，$N\to+\infty$时，时延误差为零！（上述的推导式中没有任何一条能产生时延误差的假设！）这是此模型最大的优点！但 N 越大，计算机控制系统也越复杂，因此 N 的选取应该权衡考虑。表 3 是 N 的不同取值下利用计算机模拟得到的ε_E的大小及程序运行时间，发现 N=2 时，得到的结果已经很让人满意，且 N 的继续增大不会带来ε_E的明显改善，但计算机控制的复杂度却明显增加，因此取 N=2.

表 3 相对能量误差及运行时间随 N 的变化关系

阶数 N	相对能量误差	运行时间（s）
0	0.2207%	0.0753
1	0.002940%	0.1802
2	0.001294%	0.3225
3	0.001234%	0.5157
4	0.001233%	0.7577
5	0.001233%	1.0538
6	0.001233%	1.4055
7	0.001233%	1.8021
8	0.001233%	2.2370
9	0.001233%	2.7520
10	0.001233%	3.3385

模拟测试的结果表明，相对能量误差几乎趋于零，已经远远小于模拟测试模型本身的误差。所以，计算机模拟的方法已经不能验证此模型的具体误差大小（也就是说结果中的 0.00123%不一定是真实值），但是，测试结果能够说明本模型的测试精度随阶数 N 的增加有很高的收敛性。

下图为$N = 2$时计算机模拟结果的部分曲线，可以看出，两曲线基本重合；说明时延误差基本被消除。

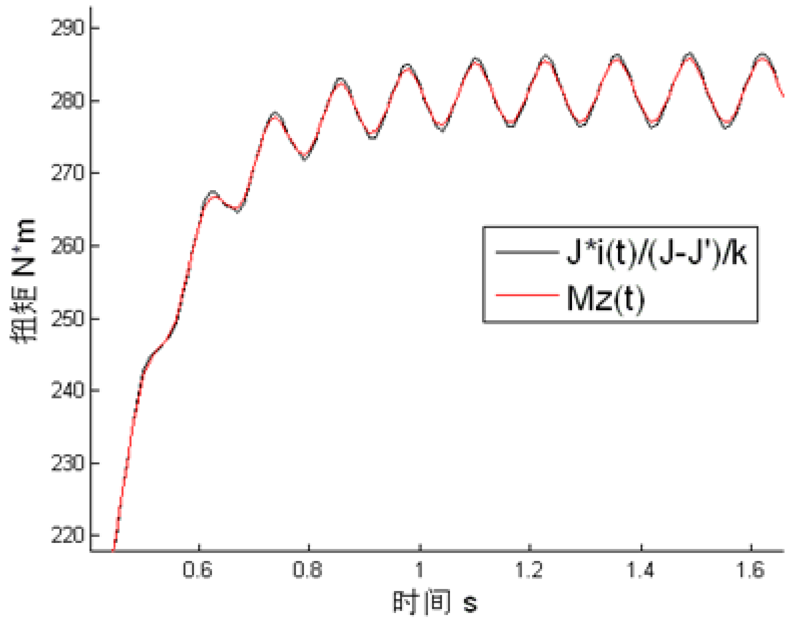

图 8 N=2 时的计算机模拟结果

4)稳定性分析

计算机模拟的方法已经不能验证此模型的具体误差大小，但是在一定范围内计算机模拟的方法还是有助于我们对此模型进行稳定性分析。使用多组初始值进行模拟，得到以下结果：

表格 4 不同初始值下的模拟结果

初始扭矩 N·m	初始转速 rpm	能量相对误差
40	400	0.03133%
40	500	0.00110%
40	600	0.00982%
40	700	0.01377%
80	500	0.00109%
120	500	0.00109%
160	500	0.00108%

观察结果可以发现本模型的对于初始扭矩稳定性较高，与 4.5.1 模型类似。

5. 驱动电流控制模型拓展

5.1　　拓展模型一　　多目标规划模型

5.1.1　目标函数的确定

本模型旨在通过最优化的方法搜索出一套电流分配方案。

由于能量误差的大小是评价控制方法优劣的一个重要指标，同时，理想条件下，驱动电流和制动力产生的瞬时扭矩之间满足关系式（11），因此目标函数为

$$\text{Min} \quad \varepsilon_E \tag{a}$$

$$\text{Min} \quad \sum_{k=0}^{N-1}\left[i(k\Delta t)-\frac{K(J-J')}{J}M_z(k\Delta t)\right]^2 \tag{b}$$

其中ε_E是相对能量误差，可据(15)式求出。

实际上，这里把（b）式设为目标函数还处于以下考虑：如果（b）式以约束条件形式 $i(k\Delta t)=\frac{K(J-J')}{J}M_z(k\Delta t)$出现，那么从理论上来说，仅需要试验设备初始观测值和所有的约束条件就可以求解出确定的电流控制方案，目标函数（a）式形同虚设。因此，这里把（b）式设为目标函数，构成多目标规划模型。

5.1.2　模型建立

考虑到角速度与角减速度之间的物理约束、瞬时电流与角加速度之间的关系约束，建立多目标规划模型如下：

$$\text{Min} \quad \varepsilon_E$$

$$\text{Min} \quad \sum_{k=0}^{N-1}[i(k\Delta t)-\frac{K(J-J')}{J}M_z(k\Delta t)]^2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \omega((k+1)\Delta t)-\omega(k\Delta t)=\beta(k\Delta t)\Delta t, k=0,1,\dots,N-1 \\ i(k\Delta t)=K(J-J')\beta \\ M_z(t)=\dfrac{C_1}{1+C_2e^{-\alpha_1 t}}\left[1+(C_3+C_4\omega(t)^{-\alpha_2})\cdot\cos^{\alpha_3}\left(\omega_0 t-\dfrac{1}{2}C_5t^2+\theta_0\right)\right] \\ \varepsilon_E=\dfrac{|E_S-E_L|}{E_L} \\ E_S=\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}M_z(t_0+k\Delta t)\omega(t_0+k\Delta t)\Delta t \\ E_L=\dfrac{1}{2}J{\omega_0}^2-\dfrac{1}{2}J{\omega_e}^2 \end{cases}$$

5.1.3　模型求解

1)首先对目标函数(b)去量纲化，令 $\emptyset_2=\frac{\sum_{k=0}^{N-1}[i(k\Delta t)-\frac{K(J-J')}{J}M_z(k\Delta t)]^2}{\sum_{k=0}^{N-1}[\frac{K(J-J')}{J}M_z(k\Delta t)]^2}$，并记$\emptyset_1=|\varepsilon_E|$，然后对$\emptyset_1$、$\emptyset_2$进行综合加权，权系数满足$\lambda_1+\lambda_2=1$. 以 $\emptyset=\lambda_1\emptyset_1+\lambda_2\emptyset_2$作为目标函数，其中权值取$\lambda_1=\lambda_2=0.5$，转化为单目标规划模型。

2) 由于粒子群算法有较快的收敛性和运算速度，在可行域为凸集的场合下较适用，同时为了克服其易收敛于局部最优解的缺点，本题使用了加入变异机制的粒子群算法，算法流程如下：

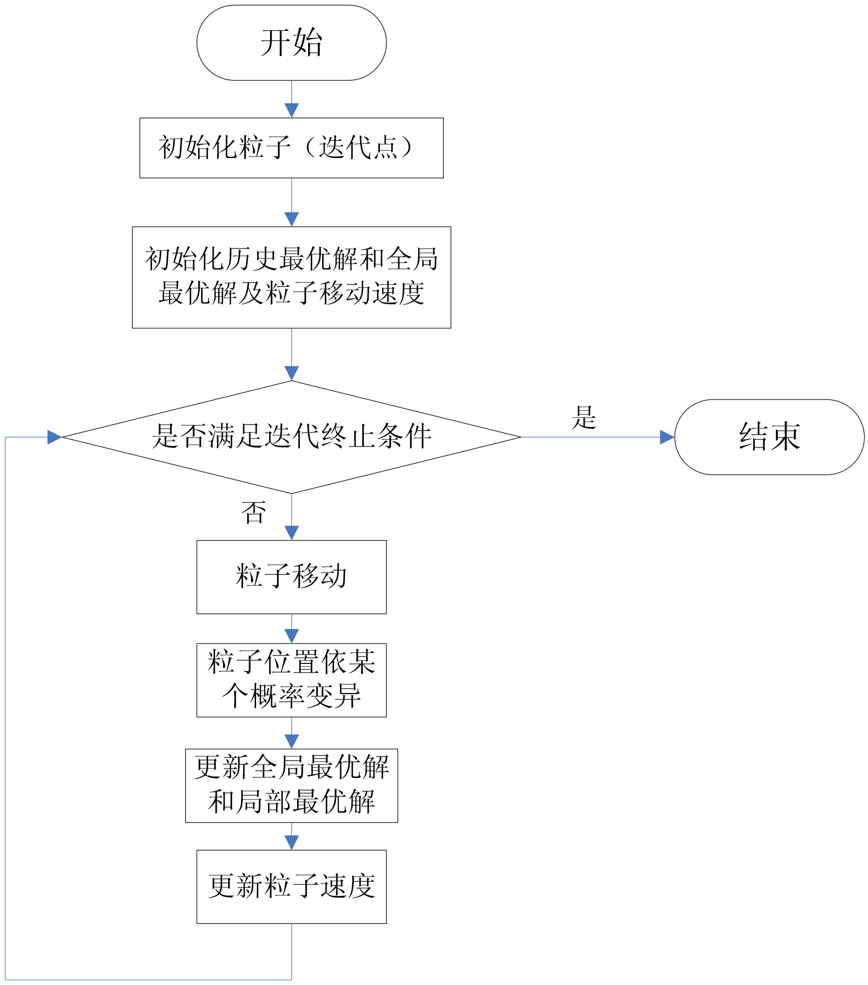

图 9 引入变异机制的粒子群算法流程

据此，在制动初始时刻扭矩40N·m、转速514.33rpm，完成制动时转速不大于257rpm条件下，求得的驱动电流变化如图 10 所示，曲线在 t=2s 附近的异常是由于在该处对（18）式的拟合效果不理想造成的。

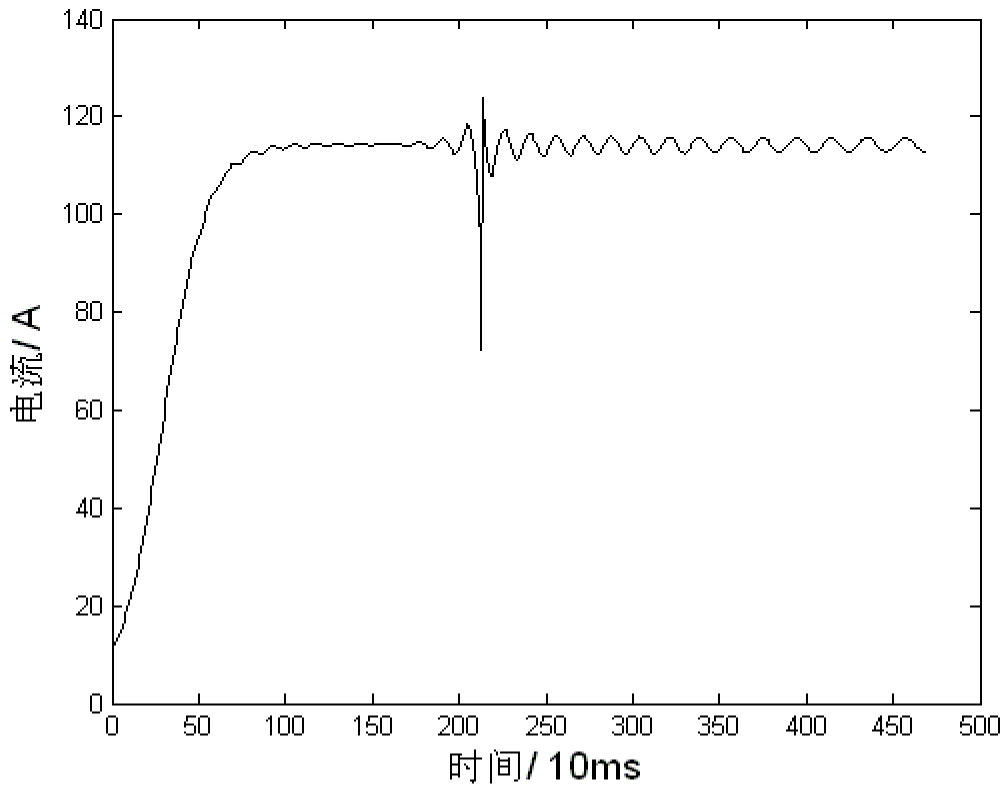

图 10 多目标规划模型求解得到的驱动电流曲线

5.2 拓展模型二　　基于非线性方程的迭代模型

5.2.1　模型建立

本模型旨在通过求解方程组从而计算出一套电流分配方案。

由前文所述，根据以下方程组及试验设备初始观测值可求解出电流控制方案。

$$\begin{cases} \omega((k+1)\Delta t)-\omega(k\Delta t)=\beta(k\Delta t)\Delta t, \qquad k=0,1,\ldots,N-1 & (\mathrm{I}) \\ i(k\Delta t)=K(J-J')\beta & (\mathrm{II}) \\ M_z(t)=\dfrac{C_1}{1+C_2e^{-\alpha_1 t}}\left[1+(C_3+C_4\omega(t)^{-\alpha_2})\cdot\cos^{\alpha_3}\left(\omega_0 t-\dfrac{1}{2}C_5t^2+\theta_0\right)\right] & (\mathrm{III}) \\ i(k\Delta t)=\dfrac{K(J-J')}{J}M_z(k\Delta t) & (\mathrm{IV}) \end{cases}$$

5.2.2　模型求解

由于此方程组是非线性的，较难求解，本文采用如下方法：

方程Ⅰ、Ⅱ、Ⅳ联立，可得：$\omega(k\Delta t)=\omega(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\frac{M_z(i\Delta t)}{J}\Delta t$

于是$M_z(t)=\frac{C_1}{1+C_2e^{-\alpha_1 t}}\left[1+\left(C_3+C_4\omega(t)^{-\alpha_2}\right)\cdot\cos^{\alpha_3}\left(\omega_0 t-\frac{1}{2}C_5t^2+\theta_0\right)\right]\triangleq F(M_z(t),k\Delta t)$

假设一向量组$(M_{z_1},M_{z_2}\ldots M_{z_n})$满足：

$$M_{z_m}=F(M_{z_{m-1}},k\Delta t)$$

在$F(M_z(t),k\Delta t)$中ω的改变对函数值的相对影响较小，因此在测试函数$F(M_{z_{m-1}},k\Delta t)$

时发现向量序列$\{M_{z_n}\}$的收敛性较强，于是迭代算法设计如下：

Step1:读取输入信号的$\mathrm{M_i}$值，并计算对应的M_z'($M_z' = \frac{M_i}{\mathrm{J-J'}}\mathrm{J}$)

Step2:令$M_{z_1} = \mathrm{M_z'}$, 依次求M_{z_2}, M_{z_3} …的值，直到$\left\|M_{z_k} - M_{z_{k-1}}\right\| < \varepsilon$，ε为一小量。令$\mathrm{M_z} = M_{z_k}$。

Step3:计算与$\mathrm{M_z}$值对应的其余参数：$\mathrm{M_i}$，ω，ε_E。

流程图如下：

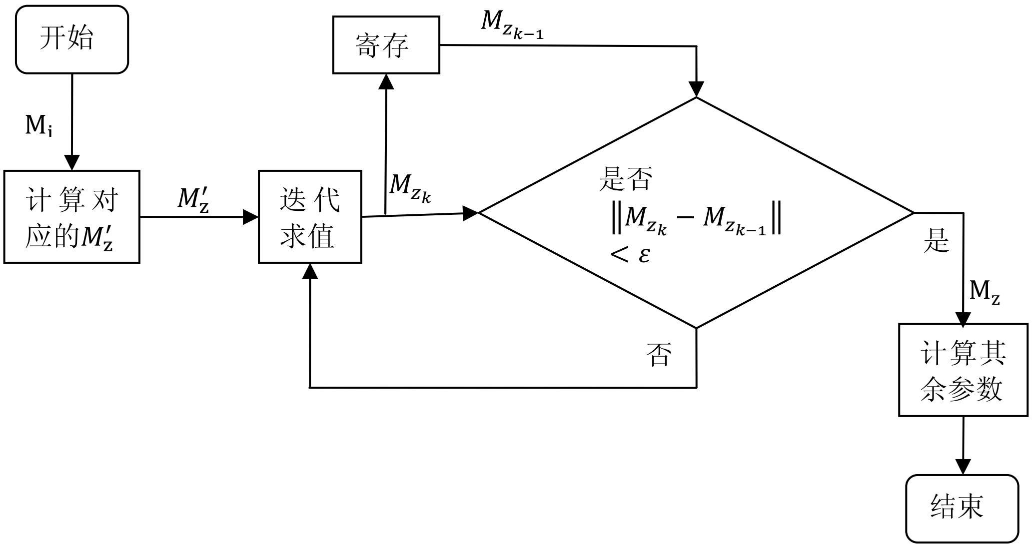

图 11　求解流程

据此，以问题四所给数据为初始迭代点，求得的驱动电流变化如下图所示：

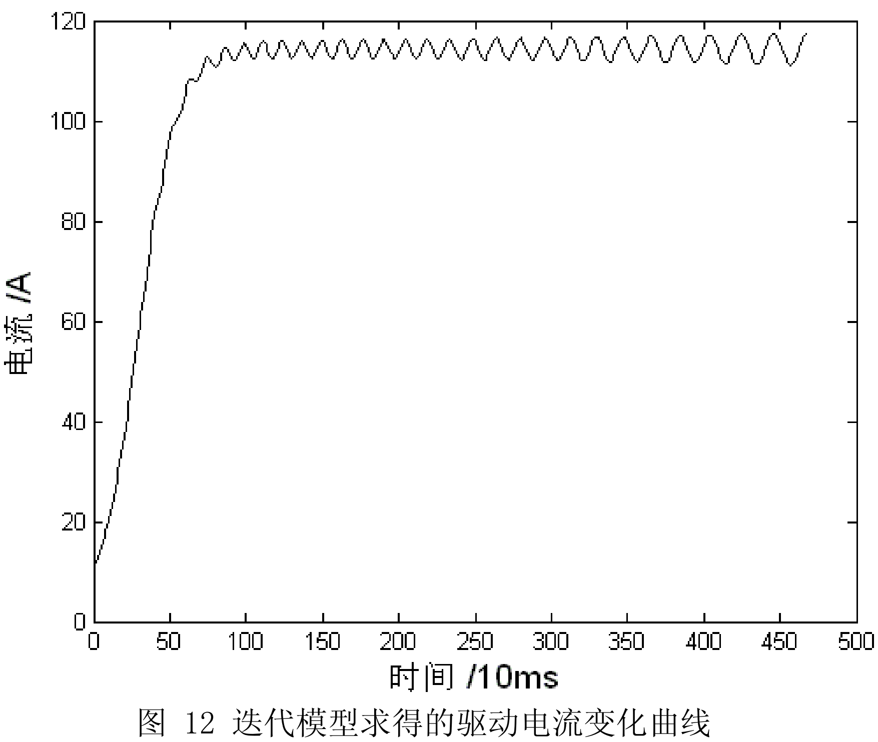

图 12 迭代模型求得的驱动电流变化曲线

6. 模型优缺点分析

1）问题三提出的基本模型：

优点：从基本物理定律推导出发，得到了一个简洁的电流控制模型，该模型有严谨的理论基础，所以模型得到的结果具有一定的精确度，同时简洁的模型使模型的求解速度较快。

缺点：在离散化时，依据模型的基本假设带来的时延误差较为明显。

2）问题五中提出的离散模型：

优点：直接由问题三导出的基本模型得到，简单；以相对误差作为评价指标，使评价更为准确有力。

缺点：时延效应明显，不可避免地带来误差。

3）问题五提出的引入反馈机制的改进模型

优点：为了降低直接基于问题三基本模型推出的离散模型的误差，引入了反馈回路，在模型复杂度没有太大增加的情形下大幅提高了模型结果的精确度。

缺点：没有完全消除时延误差。

4）基于 Laplace 变换的电流控制模型

优点：基于 Laplace 变换和信号与系统理论，巧妙利用泰勒展开式，理论上消除了系统误差，并在实践中表现出良好的特性，低阶的模型即可保持高精确度。

缺点：时间复杂度随着阶数的增大增加较快。

5）多目标规划模型

优点：其可行域为凸集，使用引入变异机制的粒子群算法解这个模型时计算速度快，迭代收敛速度快。

6）基于非线性方程的迭代模型

优点：在求解非线性方程的领域较其他算法有较强优势，求得的解稳定性高，计算速度快。

缺点：此解法只适用于能收敛于不动点或周期性解的方程，普适性不强。

7. 模型推广

本文解决了具有时延误差的过程控制问题。针对问题六提出的模型可应用于许多具有时延误差的过程控制问题，例如冷库温度控制，精确制导导弹的航向控制等。模型中利用泰勒展开式对传输函数等效替换的思想在信号处理与控制领域有相当的启发性。

8. 参考文献

[1] 姜启源，谢金星，叶俊.数学模型[M].北京:高等教育出版社，2003

[2] 吴百诗.大学物理学上册[M].北京:高等教育出版社，2004

[3] 郑君里，应启珩，杨为理.信号与系统上册[M].北京:高等教育出版社，2000