

四色定理的数学证明

邹山中

广州市天河路 228 号 2106 室 510280 E-mail: 75473066@qq.com

摘要 定义一个区域，把区域的范围，线段，区域相交的交点以及相邻区域的边界等作出定义，再定义一个基础颜色，通过对地图中的交点进行收缩或膨胀，分别从交点收缩或膨胀后的状况进行分析，把一幅由边界和交点构成的复杂区域地图，简化为仅仅只有边界的地图，得出了构成一幅地图最多只用四种颜色便可区分所有的区域的结论。

关键词 区域；基色；边界；交点；收缩和膨胀

MR (2010) 主题分类 11R04 **中图分类** O156.1

1. 预备工作

定义 1，区域，被一单一线条所封闭的空间我们定义为区域图 1：



如何能在地图上表现一个区域呢？这就必须把区域绘在一张纸上，当纸与区域的颜色不同时，我们便可在纸上清楚地看见区域。如上图，我们把纸的颜色称为基色，如此便有：

定义 2 基色，是指我们绘制地图用的纸张的颜色，显然，基色与地图上任何一区域的颜色是不同的，且基色无边界，无形状，他是因绘图需要而自然的存在。因此我们有：

推论 1，要表示一个区域，最少有两种颜色，基色+区域色。

定义 3，矢量线段，从一个点到另一点间的区间称为线段，例如 $A \rightarrow B$ 记为 \overrightarrow{AB} ，我们可得到引理一，一个封闭的区域上最多三个线段便可分别出不同的矢量线段。

如图 2， \overrightarrow{AB} 段 \overrightarrow{BC} 段 \overrightarrow{CA} 段。

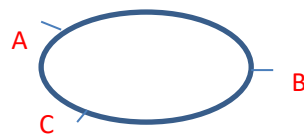


图 2

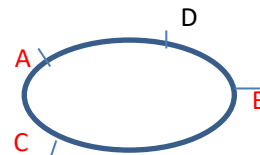


图 3

证：图 3，在三段区域中任加一点 D，因为 D 与 C 不相邻，所以当 $D=C$ 时，仍然可区分不同的区段，如图 3 中设 $D=C$ ，便有 \overrightarrow{AC} \overrightarrow{CB} \overrightarrow{BC} \overrightarrow{CA} 线段，显然相邻线段都不相同，所以在图 3 中任意加多 n 个点，都可以找到一个不相邻的点使这两点相同，使他们的相邻线段互不相同。如果一个区域有 n 段则称为 n 边区域。那么我们只用 A,B,C 三点便可把区域区分出任意多段。而使相邻的线段不相同。

定义 4，边界，如何才能知道两相邻区域相连接了呢？那么他的连接部分必须形成一条相交的边，因为两区域相交必须是确定的一条边，所以相交两区域的任一区域必须有一线段，此线段与另一区域的一个线段相组合，这样就产生了边界。因此，边界是由两种不同的颜色结合后的线段。

定义 5，交点。三个或更多个相邻区域两两相交的结合处，在图 4 中，O 是交点，

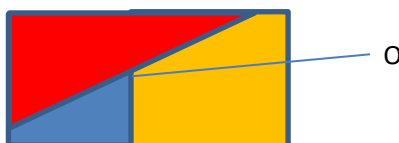


图 4

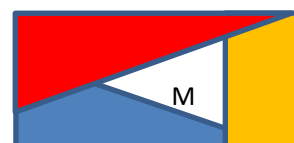


图 5

与引理一中线段的证明方法一样，只需 A,B,C 三种不同的颜色便可将不同的区域区分开。如

果有 n 个这样的区域结合，则称为 n 个区域的交点，显然，我们可以从 O 点放射线的数量来得知有几个区域在此相交，有 n 条放射线时，我们便可知道有 n 个区域在此相交。且这 n 个区域仅用 A, B, C 三种不同的颜色使他们相邻的颜色互不相同。

定义 6 基色被封闭，图 5， M 区域就叫做基色被封闭。由于基色无边界无大小，显然，图 5 中 M 收缩成一点后就是图 4。

因此，我们可以得到**引理二**：当基色被 n 个区域封闭后，由于基色无大小无边界，所以被封闭的基色区域可收缩成一个交点，而不影响区域相交的本来结构。

这样，我们可以得到引理一的**推论**：相交区域的交点可膨胀为一个被封闭的基色区，而不影响区域相交的本来结构。

2.命题证明

在任何一幅地图中，我们发现无论任何复杂的区域结构，也仅仅由四部分组成，

1. 区域 2.被封闭的基色区 3.交点， 4.边界。

然后使用不同的颜色来区分不同的区域。

根据引理二，我们将一幅地图中的所有交点膨胀为一封闭的基色区域。图 6



图 6

图 6，是 n 个区域交点膨胀后的示意图，我们取 $n \geq 3$ ，用同样的方法可以显示地图中的所有膨胀后的交点，那么把一幅地图中的每个交点膨胀之后，地图中所有的交点都变成了图 6，这时，这幅地图就没有交点了。（地图中的交点膨胀后，地图中的区域结构不会改变），这时，我们如何区分封闭的基色区域与地图中的区域呢？由于基色区域是在三种颜色交点的前提下膨胀而来，显然，如果一个区域的封闭线上含有 A, B, C 三种颜色，那么该区域就是封闭的基色区域。

那么地图中区域的封闭线上只能有两种不同的颜色（因基色可伸缩所以基色被忽略），当区域的颜色是 A 时，封闭线上只能有 B, C 两种颜色，当区域的颜色是 B 时，封闭线上只能有 A, C 两种颜色，当区域的颜色是 C 时，封闭线上只能有 A, B 两种颜色，因此，与本区域相交的区域只要与本区域的颜色不同即可找到共同的边界。如：颜色是 A 与颜色是 B 的两区域相交，也就是 A 区域封闭线上的 B 与 B 区域封闭线上的 A 相交产生边界。

这样我们便可得出结论，由于地图中的区域封闭线上只能有两种颜色，所以当多个区域相交时，区域间只要有三种颜色便可以区分所有的区域，因此，三个不同的颜色区域加上基本颜色可以区分地图的任何区域， $3 + 1 = 4$ ，因此我们可以用四种颜色区分任何地图的任何区域。四种颜色包含一种基本颜色和三种区域颜色。证明完

REFERENCES

[1] Pinsen Zhou. Computer science. China Science and Technology Press. (2010)