

# 四色定理的数学证明

邹山中

广州市天河路 228 号 2106 室 510280 E-mail: 75473066@qq.com

**摘要** 定义一个区域，把区域的范围，线段，区域相交的交点以及相邻区域的边界等作出定义，再定义一个基础颜色，通过对地图中的交点进行收缩或膨胀，分别从交点收缩或膨胀后的状况进行分析，把一幅由边界和交点构成的复杂区域地图，简化为仅仅只有边界的地图，得出了构成一幅地图最多只用四种颜色便可区分所有的区域的结论。

**关键词** 区域；基色；边界；交点；收缩和膨胀

**MR (2010) 主题分类** 11R04 **中图分类** O156.1

## 1. 预备工作

**定义 1**，区域，被一单一线条所封闭的空间我们定义为区域图 1：



如何能在地图上表现一个区域呢？这就必须把区域绘在一张纸上，当纸与区域的颜色不同时，我们便可在纸上清楚地看见区域。如上图，我们把纸的颜色称为基色，如此便有：

**定义 2** 基色，是指我们绘制地图用的纸张的颜色，显然，基色与地图上任何一区域的颜色是不同的，且基色无边界，无形状，他是因绘图需要而自然的存在。因此我们有：

**推论 1**，要表示一个区域，最少有两种颜色，基色+区域色。

**定义 3**，矢量线段，从一个点到另一点间的区间称为线段，例如  $A \rightarrow B$  记为  $\overrightarrow{AB}$ ，一个封闭的线条上最多三个点便可分别出不同的矢量线段。如图 2， $\overrightarrow{AB}$  段  $\overrightarrow{BC}$  段  $\overrightarrow{CA}$  段。

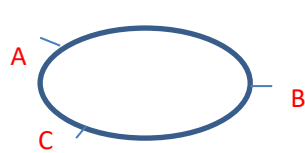


图 2

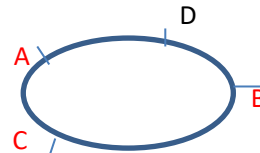


图 3

**证：**图 3，在三段区域中任加一点 D，因为 D 与 C 不相邻，所以当  $D=C$  时，仍然可区分不同的区段，如图 3 中设  $D=C$ ，便有  $\overrightarrow{AC}$   $\overrightarrow{CB}$   $\overrightarrow{BC}$   $\overrightarrow{CA}$  线段，显然相邻线段都不相同，所以在图 3 中任意加多 n 个点，都可以找到一个不相邻的点使这两点相同，使他们的相邻线段互不相同。如果一个区域有 n 段则称为 n 边区域。那么我们只用 A,B,C 三点便可把区域区分出任意多段。而使相邻的线段不相同。

**定义 4**，边界，如何才能知道两相邻区域相连接了呢？那么他的连接部分必须形成一条相交的边，因为两区域相交必须是确定的一条边，所以相交两区域的任一区域必须有一线段，此线段与另一区域的一个线段相组合，这样就产生了边界。

**定义 5**，交点。三个或更多个相邻区域的结合处，在图 4 中，O 是交点，与定义 3 中线段的



图 4

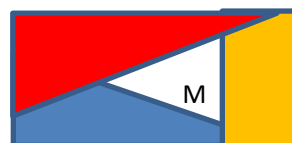


图 5

证明方法一样，只需三种不同的颜色便可将不同的区域区分开。如果有 n 个这样的区域结合，

则称为  $n$  个区域的交点，显然，我们可以从  $O$  点放射线的数量来得知有几个区域在此相交，有  $n$  条放射线时，我们便可知道有  $n$  个区域在此相交。且这  $n$  个区域仅用三个不同的颜色使他们相邻的颜色互不相同。

**定义 6** 基色被封闭，图 5， $M$  区域就叫做基色被封闭。由于基色无边界无大小，显然，图 5 中  $M$  收缩成一点后就是图 4。

因此，我们可以得到**引理一**：当基色被  $n$  个区域封闭后，由于基色无大小无边界，所以被封闭的基色区域可收缩成一个交点，而不影响区域相交的本来结构。

这样，我们可以得到引理一的**推论**：相交区域的交点可膨胀为一个被封闭的基色区，而不影响区域相交的本来结构。

## 2.命题证明

在任何一幅地图中，我们发现无论任何复杂的区域结构，也仅仅由三部分组成，1.交点 2.被封闭的基色区 3.边界。再使用不同的颜色来区分不同的区域。

根据引理 1，我们将地图中的所有交点膨胀为一封闭的基色区域。图 6

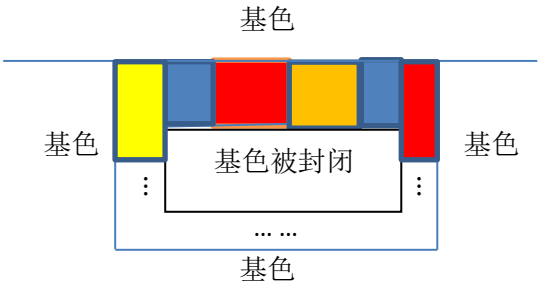


图 6

图 6，是  $n$  个区域交点膨胀后的示意图，我们取  $n \geq 3$ ，用同样的方法可以显示地图中的所有膨胀后的交点，那么把一幅地图中的每个交点膨胀之后，地图中所有的交点都变成了图 6，这时，这幅地图就变成只剩下封闭的基色区域和由两个相邻区域的结合产生的边界。（地图中的交点膨胀后，地图中的区域结构不会改变）因为每个相邻的区域都是不同的，而不同的区域只有三种颜色，三个不同的颜色区域加上基本颜色可以区分地图的任何区域， $3 + 1 = 4$ ，因此我们可以用四种颜色区分任何地图的任何区域。四种颜色包含一种基本颜色和三种区域颜色。证明完