证明无奇完全数

邹山中

摘 要 设奇数 $Q=2N+1$,将 N 称为奇数 Q 的奇体,通过对 N 的分析证明了不存在奇完全数。

1．奇合数体的表示法

设 p 是素数，Q与q是奇数，使$Q=pq$，若$Q=2N+1.p=2s+1,q=2n+1,n\geq 1,N\geq 1$，则有$2N+1=(2S+1)$（$2n+1$），从而$N=(2S+1)n+s,n\geq 1$。$N$ 称为奇合数体，可得

定义 1，奇合数体的表示法， $N=P_I n+S_I$ … …（1）

2．命题证明

用反证法，假设存在奇完全数 Q，$Q=P_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_i^{n_i}\ldots p_m^m,n_i\geq 1$ p 是奇完全数 Q 的素数因子，$Q=2N+1$，把 Q 分为两个奇数的乘积，$Q=P_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_i^{n_i}\times p_{i+1}^{n_{i+1}}\ldots p_m^m=Q_{i1}Q_{i2}$，根据奇完全数的定义，

有$Q=Q_{11}Q_{12}=Q_{21}Q_{22}=\ldots Q_{i1}Q_{i2}=\cdots Q_{t1}Q_{t2}=1+\sum_{i=1}^{t}(Q_{i1}+Q_{i2})$，$(i\geq 1,t\geq 1)$

设，$Q_{i1}=2N_{i1}+1$，$Q_{i2}=2N_{i2}+1$，则有 $Q=2N+1=(2N_{i1}+1)(2N_{i2}+1)$.

即：$Q=2N+1=\cdots 4N_{i1}N_{i2}+2N_{i1}+2N_{i2}+1\ldots=1+\sum_{i=1}^{t}(2N_{i1}+1+2N_{i2}+1)$

可得：$N=\cdots 2N_{i1}N_{i2}+N_{i1}+N_{i2}\ldots=\sum_{i=1}^{t}(N_{i1}+N_{i2}+1)$ … …(2)

（2）式称为奇完全数的奇体表达式。由（2）可得**推论一，N 为偶数，t 也是偶数。**

证：若 N 为奇数，则$N_{i1}+N_{i2}$为奇数，而$N_{i1}+N_{i2}+1$为偶数，左右奇偶不合，故知$N_{i1}+N_{i2}$必为偶数，因为$N_{i1}+N_{i2}+1$是奇数，$\therefore t$必须是偶数。**证明完。**

因为 $N\in h$ 根据**定义 1**，$N=pn_i+s$，$(s=(p-1)/2$，$n_i\geq 1)$.

在 $Q=P_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_i^{n_i}\ldots p_m^m$ 中，设 p_1 是 Q 中最小的素数， 把 N_{i1} 及 N_{i2} 分别表为

$N_{i1}=p_1n_1+k_1$，$N_{i2}=p_1n_2+k_2$,($n_1\geq 0$，$n_2\geq 0$，$0\leq k_1<p_1$，$0\leq k_2<p_1$)

N_{i1} ，N_{i2} 可以依据组合{ $p_1n_1+k_1$，$p_1 n_2+k_2$}的不同，形成不同表达式。

将各种组合代入(2)， 有 $2(p_1n_1+k_1)(p_1n_2+k_2)+p_1n_1+k_1+p_1n_2+k_2$

$=2{p_1}^2n_1n_2+2p_1n_1k_2+2p_1n_2k_1+2k_1k_2+p_1 n_1+k_1+p_1 n_2+k_2$

$N=p_1n_i+s_1=p_1(2p_1n_1n_2+2n_2k_1+2p_1n_1k_2+n_1+n_2)+2k_1k_2+k_1+k_2$

上式简化后得：

$N=p_1n_j+2k_1k_2+k_1+k_2 \quad =\sum_{i=1}^{t}(p_1n_1+k_1+p_1n_2+k_2+1)$ ……（3）

要使（3）成立，必须满足 $k_2(2k_1+1)+k_1\equiv s_1\text{mod}p_1$,

我们可以得到**推论二**，在$k_2(2k_1+1)+k_1=p_1n_i+s_1$ 中，$k_1=s_1$或 $k_2=s_1$，两者必取其一。

证， 因为 $Q=P_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_i^{n_i}\ldots p_m^m$，即：$Q=p_1q_1q_2$，其中 p_1 和 p_1q_1 可以表示为 $N_{i1}=p_1n_1+s_1$ ，$\therefore p_1n_j+2k_1k_2+k_1+k_2=p_1n_u+s_1$ **证明完。**

我们讨论当 $k_1=s_1$时， k_2 的取值 。

把 $N_{i1}=p_1n_1+k_1$ 和 $N_{i2}=p_1n_2+k_2$ 还原为 Q ，

$Q_{i1}=2(p_1n_1+s_1)+1=p_1q_1$，$Q_{i2}=2(p_1n_2+k_2)+1=2p_1n_2+2k_2+1$，

$Q_{i2}=(2k_2+1)(2p_1n_2/(2k_2+1)+1)$，因为 Q_{i2} 是奇数，所以 $2p_1n_2/(2k_2+1)$ 应该是偶数，要使 $2p_1n_2/(2k_2+1)$ 是偶数,必须满足以下条件：1）$k_2=s_1$，有 $p_1/(2k_2+1)=1$ ，2）$k_2=0$ 有 $2k_2+1=1$ ，3）$n_2=(2k_2+1)n$ 有 $n_2/(2k_2+1)=n$

1） $k_1=s_1$ ，$k_2=s_1$,

$N=p_1n_i+s_1=2p_1n_j+p_1s_1+s_1=\sum_{i=1}^{t}(p_1n_1+p_1n_2+s_1+s_1+1)$

$N/p_1=2n_j+(s_1/p_1)=\sum_{i=1}^{t}(n_1+n_2+1)$

$\because$ s_1/p_1 不是整数，所以当 $k_1=s_1$时，$k_2\neq s_1$。

因此我们可以得到**推论三**，在$Q=P_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_i^{n_i}\ldots p_m^{m}$ 中，有 $n=1$，即 $Q=p_1p_2\ldots p_i\ldots p_m$. 证，如果 $p_i^{n_i}, n_i>1$，则有 $Q=p_iq_1p_iq_2$，使得 $k_1=s_1, k_2=s_1$.，与推论三矛盾。 **证明完**

2) $k_2=0$, $k_1=s_1$

$N=p_1n_i+s_1=\sum_{i=1}^{t}(p_1n_1+p_1n_2+s_1+1)=t(s_1+1)+\sum_{i=1}^{t}(p_1n_1+p_1n_2)$

$\exists!\ t(s_1+1)\equiv s_1 \bmod p_1$,即 $t(s_1+1)=p_1n+s_1$，使等式成立。

因为 t 是偶数，设 $t=2n_t$

$2n_ts_1+2n_t=2n_ts_1+n_t+n_t=p_1n_t+n_t$，$\exists!\, n_t=p_1n+s_1$，$n\geq 0$,满足等式，、

所以$p_1^2n+p_1s_1+p_1n+s_1=p_1n(p_1+1)+2s_1s_1+s_1+s_1$

$N_{i1}=p_1n_1+s_1$，$N_{i2}=p_1n_2+s_1$ 这样的结果与 $k_2=s_1$,相同， $\therefore k_1=s_1$，$k_2\neq 0$

3）在 $2p_1n_2/(2k_2+1)$中， $n_2=(2k_2+1)n$

$\because p_1/(2k_2+1)$不是整数，$\therefore n_2/\ (2k_2+1)$ 必须是整数.

$\because p_1$是 Q中最小的素数，, $\therefore$ $(2k_2+1)=p_i$，$p_i>p_1$，$\therefore p_1n_2+k_2$ 可以表示为 $p_in_2+s_i$，$s_i=k_2$，$s_i=(p_i-1)/2$，p_i 是 Q.中的素数。

$\because 0\leq k_2<p_1$ ， $(2k_2+1)>p_1$，$\therefore$ $k_1<k_2\leq 2k_1$，

设，$k_1=m_1$，$k_2=m_2$，有， $k_2-k_1=(m_2-m_1)$ $=\Delta n$， 显然$\Delta n\leq m_1, k_2=\ \Delta n+k_1$

所以 (3) 有: $N=p_1n_i+s_1\ =\sum_{i=1}^{t}(p_1n_1+k_1+p_1n_2+k_1+\Delta n+1)$

$\qquad\qquad\qquad =t\Delta n+\sum_{i=1}^{t}(p_1n_1+p_1n_2+p_1)$

$\exists!\,(t\Delta n-s_1)/p_1=n$, 即 $s_1(t\Delta n/s_1-1)/p_1=n$，$\because s_1/p_1$不是整数,

$\therefore$ $(t\Delta n/s_1-1)/p_1$必须是整数,如果. $\Delta n/s_1$是整数，即 $\mathrm{k}_1=s_1, k_2=2s_1$，所以 (2) 有:

$N=2p_1n_j+2\times 2s_1s_1+2s_1+s_1\ =\sum_{i=1}^{t}(p_1n_1+p_1n_2+s_1+2s_1+1)$

$2p_1n_j+s_1(4s_1+3)=ts_1+\sum_{i=1}^{t}(p_1n_1+p_1n_2+p_1)$

$\exists!\, ts_1=p_1n+s_1$ 使得$(ts_1+\sum_{i=1}^{t}(p_1n_1+p_1n_2+p_1))\equiv s_1 \bmod p_1$

$(ts_1-s_1)/p_1=n$,即 $s_1(t-1)/p_1=n$, $\because s_1/p_1$,不是整数 $\therefore (t-1)/p_1=n$,

即 $t-1=p_1n$. $\because Q=p_1p_2\ldots p_i\ldots p_m$,用 Q 中p_i逐个代入 $\therefore t-1=p_1p_2\ldots p_i\ldots p_mn$,

这使得 $\sum_{i=1}^{t}(N_{i1}+N_{i2}+1)\ >Q$. 所以 $\Delta n\neq s_1$.

$\because$ $(t\Delta n/s_1-1)/p_1=n$, 即 $t\Delta n/s_1-1=p_1n$, $\because \Delta n/s_1$ 不是整数,

$\therefore t/s_1$ 必须是整数， 所以 $t\Delta n$ 在能整除 $s_1, s_2, \ldots s_i\ldots s_m$ 的同时， $\dfrac{t\Delta n}{s_1}-1$ 还必须整除 p_i . $\therefore$ $t>p_1p_2\ldots p_i\ldots p_m$,这样便造成$\sum_{i=1}^{t}(N_{i1}+N_{i2}+1)\ >Q$,所以当 $k_1=s_1$时，因 k_2 无法取值，原假设不成立，所以不存在奇完全数。证明完！