

医院门诊排队网络分析

米红娟

(西北师范大学计算机科学系 兰州 730070)

作者简介 米红娟,女,33岁,1986年毕业于兰州大学数学力学系,现为西北师范大学计算机科学系讲师,主要研究方向为计算方法与概率统计的应用.

中图法分类号 O 226

摘 要 利用排队论,对医院门诊部的排队网络进行分析,确定了排队模型,给出了统计平衡条件下的主要指标,讨论了最优化问题,并进行了实例分析.

关键词 医院门诊 排队论 排队网络 最优化

在我国,医院门诊部工作量大,一般常见病、多发病患者主要在门诊部就诊.患者的到达及接受就诊服务均受许多随机因素的影响,出现排队现象不可避免.以下对医院门诊排队现象进行全面分析,给出此排队系统的主要指标,为医院门诊部的质量评估、管理科学化、缩短患者就诊时间提供科学依据.

1 假设及说明

通常,患者到来后,接受服务的顺序为:挂号、诊断、交费、取药.用节点 1、2、3、4 依次表示挂号处、诊断处、交费处、取药处.每个节点由若干服务台并联而成,均是一个独立的服务机构,4 个节点按以上顺序串联构成排队网络,因此由这 4 个节点组成的排队网络可近似地描述门诊排队现象.

1) 输入过程:据观测,患者流基本满足平稳性、无后效性及普通性,因而假设患者输入流为 Poisson 流^[1],单个到达,来源无限.

设 $N(t)$ 表示 $(0, t)$ 时间内来到的患者数,现根据某大型医院门诊部的观测结果,用² 检验法对 $N(t)$ 服从 Poisson 分布进行假设检验^[2].

$$H_0: N(t) \text{ 的分布律 } P_k(t) = P\{N(t) = k\} = \frac{(t)^k e^{-t}}{k!},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

取 $t = 1$, 样本容量 $n = 160$, 数据如下:

来到的患者数 k 0 1 2 3 4 5

发生的频数 f_k 18 36 50 37 15 4

由点估计: $\sim = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^5 k f_k = 2.04$, 计算得:

*甘肃省教委科研基金资助课题
收稿日期:1996-06-26 修改稿收到日期:1997-12-16

k	0	1	2	3	4	5
$nP_k(1)$	20.80	42.43	43.26	29.43	15.01	6.12
$\frac{[f_k - nP_k(1)]^2}{nP_k(1)}$	0.377	0.974	1.050	1.947	0.000	0.734
$\chi^2 = \sum_{k=0}^5 \frac{[f_k - nP_k(1)]^2}{nP_k(1)}$	= 5.082.					

取显著性水平 $\alpha = 0.05$, 查表得 $\chi_{0.05}^2(4) = 9.488$. 可见 $\chi^2 < \chi_{0.05}^2(4)$, 所以在水平 0.05 下接受假设 H_0 , 即认为患者流为 Poisson 流.

2) 排队规则: 等待制, 挂号限额, 先到者先服务, 系统容量有限. 但通常几乎不发生患者数达到限额的现象, 因此认为容量近似无限.

3) 服务机构: 门诊排队系统为混合型网络, 患者单个接受服务. 现以 m_1 表示节点 1 处的服务台数目, 以 l 表示节点 2 处的诊断科室数, 以 s_i 表示第 i 诊断科室 (编号) 的相同服务台数, 以 m_3 表示节点 3 处的服务台数, 以 r_1 、 r_2 分别表示节点 4 处西药房及中药房的服务台数.

服务台的服务时间具有无记忆性, 即服从负指数分布^[1], 且每个患者的服务时间独立.

2 排队模型及主要指标^[2,3]

2.1 模型分析

在排队网络中, 前一节点的输出流构成后一节点的输入流, 因此每个节点的输入流均是 Poisson 流, 每个服务台的服务时间均服从负指数分布.

挂号窗口一般不同, 因此节点 1 处的排队系统由 m_1 个 $M/M/1/$ 并联而成.

每个诊断科室均为一个独立的服务系统, 服务台不加区别, 因此节点 2 处的排队系统由 $M/M/s_i/$ ($i = 1, 2, \dots, l$) 并联而成.

交费窗口不加区别, 因此节点 3 处的排队系统为 $M/M/m_3/$.

节点 4 通常分为窗口不加区别的西药房和中药房, 因此节点 4 的排队系统由 $M/M/r_1/$ 和 $M/M/r_2/$ 并联而成.

综上所述, 此排队网络涉及两种排队模型, 即 $M/M/1/$ 和 $M/M/m/$.

2.2 模型的主要指标

用 $N_1(t)$ 、 $N_2(t)$ 分别表示系统 $M/M/1/$ 和 $M/M/m/$ 在 t 时刻的患者数, 则 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 、 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 均是状态有限的生死过程, 平稳解存在.

设患者 Poisson 到达的参数为 λ , 服务时间参数为 μ . 下面给出这两种模型的主要的稳定态指标.

1) $M/M/1/$.

令服务强度为 ρ , 则 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$; $P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \{N_1(t) = n\} = {}^n P_0$, 其中 $P_0 = 1 - \rho$, $n = 1, 2, \dots$, 则主要的稳定态指标如下:

$$\text{平均队长: } \bar{N} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \frac{\rho}{1 - \rho};$$

$$\text{平均等待队长: } \bar{N} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_{n+1} = \frac{\rho^2}{1 - \rho};$$

平均等待时间: $\bar{W} = \frac{\bar{N}}{\mu}$;

平均逗留时间: $\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda}$;

平均服务系数: $\bar{F} = \frac{\bar{T} - \bar{W}}{\bar{T}}$.

2) $M/M/m/m$.

令服务强度为 $\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$, 则

$$P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \{N_2(t) = n\} = \begin{cases} \frac{(m)^n}{n!} P_0, & n = 0, 1, \dots, m-1, \\ \frac{m^n}{m!} P_0, & n = m, m+1, \dots \end{cases}$$

其中 $P_0 = \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m)^n}{n!} + \frac{(m)^m}{m!} \frac{1}{(1-\rho)} \right]^{-1}$. 主要的稳定态指标如下:

平均等待队长: $\bar{N} = \sum_{n=m}^{\infty} (n-m) P_n = \frac{P_m}{(1-\rho)^2}$;

平均队长: $\bar{N} = \bar{N} + \bar{\mu}$;

平均等待时间: $\bar{W} = \frac{\bar{N}}{\lambda}$;

平均逗留时间: $\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda}$;

平均服务系数: $\bar{F} = \frac{\bar{T} - \bar{W}}{\bar{T}}$.

模型中的未知参数 μ 、利用抽样数据由点估计得到后, 以上指标便可求得.

2.3 各节点的到达率^[4]

假设节点 1 处各窗口的设制合理, 以 λ 表示患者 Poisson 到达的到达率, 则节点 1 处可看成将患者流独立均匀地分到 m_1 个 $M/M/1$ 系统中去, 使每个子 Poisson 流的到达率均为

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{m_1}.$$

节点 1 转入节点 2 的 Poisson 流参数为 λ , 若将患者选择诊断科室 i 接受服务的概率记为 q_i , 则科室 i 的到达率为 $\lambda_{2i} = q_i \lambda$, $i = 1, 2, \dots, l$.

节点 3 的输入流来自节点 2, 其参数 $\lambda_3 = \sum_{i=1}^l \lambda_{2i} = \lambda$.

对节点 4, 由于一部分患者既取西药又取中药, 所以若以 $P_{4,1}$ 、 $P_{4,2}$ 分别记患者由节点 3 直接来到西药房、中药房的概率, 以 $P_{1,2}$ 、 $P_{2,1}$ 分别表示其中先取西药后取中药和先取中药后取西药的概率, 则西药房和中药房的患者到达率分别为 $\lambda_{4,1} = P_{4,1} \lambda + P_{2,1} \lambda_{4,2}$, $\lambda_{4,2} = P_{4,2} \lambda + P_{1,2} \lambda_{4,1}$.

这里的 q_i ($i = 1, 2, \dots, l$)、 $P_{4,1}$ 、 $P_{4,2}$ 、 $P_{2,1}$ 、 $P_{1,2}$ 均可由多次观察的对应频率的平均值来近似获得.

2.4 网络的主要指标

以 \bar{N}_i 、 \bar{N}_i 、 \bar{W}_i 、 \bar{T}_i 分别记节点 i 处的平均队长、平均等待队长、平均等待时间、平均逗留

时间 ($i = 1, 2, 3, 4$); 以 $\bar{N}_{2,i}$ 、 $\bar{N}_{2,i}$ 、 $\bar{W}_{2,i}$ 、 $\bar{T}_{2,i}$ 分别记节点 2 中科室 i 处的平均队长、平均等待队长、平均等待时间、平均逗留时间 ($i = 1, 2, \dots, l$); 分别以 $\bar{N}_{4,i}$ 、 $\bar{N}_{4,i}$ 、 $\bar{W}_{4,i}$ 、 $\bar{T}_{4,i}$ 记取药处的平均队长、平均等待队长、平均等待时间、平均逗留时间 ($i = 1$ 对应西药房, $i = 2$ 对应中药房), 则整个排队网络的主要指标如下:

$$\text{平均队长: } \bar{N} = \bar{N}_1 + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \bar{N}_{2,i} + \bar{N}_3 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \bar{N}_{4,i};$$

$$\text{平均等待队长: } \bar{N} = \bar{N}_1 + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \bar{N}_{2,i} + \bar{N}_3 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \bar{N}_{4,i};$$

$$\text{平均等待时间: } \bar{W} = \bar{W}_1 + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \bar{W}_{2,i} + \bar{W}_3 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \bar{W}_{4,i};$$

$$\text{平均逗留时间: } \bar{T} = \bar{T}_1 + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \bar{T}_{2,i} + \bar{T}_3 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \bar{T}_{4,i};$$

$$\text{平均服务系数: } \bar{F} = \frac{\bar{T} - \bar{W}}{\bar{T}}.$$

3 最优化问题^[1]

医院门诊排队系统由患者与医院两方面组成, 患者一方总希望逗留时间越短越好, 因而服务台数越多, 服务效率越高越好, 这样, 患者遭受的损失较小, 但医院的服务费用却增大了. 因为设备的增加, 服务率的提高是有条件的, 因此, 应从双方的利益出发, 以费用作为优化指标, 进行综合考察, 求出最佳的服务台数. 令

$$\text{总费用} = \text{排队损失费} + \text{服务费}$$

若服务水平固定, 则排队损失费是服务台数目的减函数, 服务费是服务台数目的增函数. 当总费用的最小值存在时, 对应的服务台数目即为最优服务台数.

例如: 考察系统 $M/M/m/\infty$. 设每个患者在系统中逗留单位时间损失费用为 c_1 元, 医院单位时间单位服务率成本为 c_2 元, 则单位时间平均总损失费用为:

$$F = c_1 \bar{N}(m) + c_2 m \mu, \quad m = 1, 2, \dots$$

用边际分析法, 求解最优的 m^* , 使

$$\begin{cases} F(m^*) < F(m^* + 1), \\ F(m^*) > F(m^* - 1). \end{cases}$$

即 m^* 必须满足:

$$\bar{N}(m^*) - \bar{N}(m^* + 1) < \frac{c_2 \mu}{c_1} < \bar{N}(m^* - 1) - \bar{N}(m^*).$$

对 $m = 1, 2, 3, \dots$ 计算 $\bar{N}(m)$ 相邻二值之差 $\bar{N}(m) - \bar{N}(m + 1)$, 若 $\frac{c_2 \mu}{c_1}$ 落在某区间 $[\bar{N}(m^*) - \bar{N}(m^* + 1), \bar{N}(m^* - 1) - \bar{N}(m^*)]$ 内, 则对应的 m^* 即为最佳服务台数.

4 实例分析

考虑到篇幅的限制, 诊断科室仅取内科、妇科、小儿科、口腔科 (分别对应 $i = 1, 2, 3, 4$). 表 1、表 2、表 3 均为对兰州市某大型综合性医院进行随机抽样所得的数据.

表 1 单个患者接受服务的时间观测值 x_i

科 室	观 测 值															
挂号处(s)	10	16	10	16	20	15	11	11	10	10	18	15	10	9	20	12
容量(人)30	30	14	8	20	6	9	8	20	12	16	10	20	20	17		
收费处(s)	56	70	40	53	54	57	133	63	43	31	67	57	36	80	40	30
容量(人)44	31	68	35	43	50	42	35	34	45	39	18	30	31	66	25	6
	20	35	33	63	25	30	39	25	67	75	36	51				
西药房(s)	16	15	52	40	70	139	13	10	120	30	10	19	52	48	16	13
容量(人)26	30	34	50	42	28	32	60	18	24	26						
中药房(s)	16	22	27	9	106	23	17	40	30	75	18	17	9	85	30	210
容量(人)26	15	20	50	12	10	184	10	90	12	75						
内科(min)	5	8	9	9	5	5	6	8	6	7	5	4	6	3	4	4
容量(人)36	3	2	10	3	4	3	3	9	4	6	5	6	8	3	4	4
	5	6	9	10												
妇科(min)	2	3	10	2	7	5	7	14	7	6	5	7	5	11	12	6
容量(人)30	5	10	4	3	7	9	6	8	5	9	15	12	10	12		
小儿科(min)	5	8	5	12	9	6	5	15	13	7	8	7	5	5	14	6
容量(人)30	6	8	6	6	7	12	8	6	6	7	7	6	5	10		
口腔科(min)	30	32	25	28	60	30	20	18	23	30	16	15	12	25	42	59
容量(人)42	25	20	30	23	31	28	24	20	28	36	30	29	38	50	30	17
	42	40	21	27	30	49	25	33	31	18						

表 2 节点 1 处单位时间(1 min) 来的患者数的观测值(容量:320)

患者频数	观 测 值									
患者数 k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
频数 f_k	18	36	50	54	51	49	30	22	10	

表 3 不同科室患者到来的频率观测值

科 室	观 测 值															
内 科	<u>43</u>	<u>42</u>	<u>100</u>	<u>169</u>	<u>148</u>	<u>152</u>	<u>149</u>	<u>150</u>	<u>158</u>	<u>215</u>	<u>155</u>	<u>117</u>	<u>140</u>	<u>161</u>		
	241	206	658	748	744	840	598	747	719	961	703	679	580	810		
妇 科	<u>22</u>	<u>12</u>	<u>84</u>	<u>78</u>	<u>83</u>	<u>95</u>	<u>56</u>	<u>80</u>	<u>63</u>	<u>89</u>	<u>97</u>	<u>75</u>	<u>62</u>	<u>90</u>		
	241	206	658	748	744	840	598	747	719	961	703	679	580	810		
儿 科	<u>32</u>	<u>18</u>	<u>71</u>	<u>63</u>	<u>78</u>	<u>81</u>	<u>51</u>	<u>81</u>	<u>75</u>	<u>77</u>	<u>62</u>	<u>59</u>	<u>79</u>	<u>78</u>		
	241	206	658	748	744	840	598	747	719	961	703	679	580	810		
节点 3 转入中药房	<u>1</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>7</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	<u>1</u>
	5	15	10	5	7	12	10	10	7	5	13	21	13	11	6	7
	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	<u>1</u>							
	10	9	6	5	11	17	11	5	6							
西药房转入中药房	<u>1</u>		<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>2</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>
	6	0	5	6	4	5	3	6	4	7	5	3	4	7	5	5
	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>							
	8	7	5	7	4	6	5	5	6							
中药房转入西药房	<u>1</u>		<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>			<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>		<u>1</u>	<u>1</u>		<u>1</u>	0
	10	0	10	10	5	0	0	6	10	10	0	10	10	0	10	0
	0	<u>1</u>	0	0	<u>1</u>	0	0	<u>1</u>	<u>1</u>	0	<u>1</u>	0	0			
		10			10			10	6		5					

由表 1 得平均服务率的估计值:

$$\bar{\mu} = \frac{n}{\sum_{i=1}^8 x_i}.$$

由表 2 得节点 1 处的平均到达率的估计值:

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_{k=0}^8 k \cdot f_k}{320}.$$

由表 3 得各平均频率作为对应概率的估计值,继而得到:

$$\bar{q}_{2,i} = \bar{q}_i (i = 1, 2, 3, 4), \bar{q}_3 = \bar{q}, \bar{q}_{4,1} = P_{4,1} \bar{q}_3 + P_{2,1} P_{4,2} \bar{q}_3, \bar{q}_{4,2} = P_{4,2} \bar{q}_3 + P_{1,2} P_{4,2} \bar{q}_3.$$

于是得到下列计算结果:

表 4 各概率的估计值

q_1	q_2	q_3	q_4	$P_{4,2}$	$P_{4,1}$	$P_{1,2}$	$P_{2,1}$
0.204 8	0.103 7	0.099 9	0.080 9	0.220	0.780	0.215	0.070

表 5 各到达率、服务率、服务强度及服务台数目

科 室	到达率	服务率	服务强度	服务台数
挂号室	3.740	2.040	0.920	2
内 科	0.766	0.180	0.850	5
妇 科	0.388	0.140	0.920	3
儿 科	0.374	0.150	0.830	3
口腔科	0.303	0.034	0.890	10
收费处	3.740	1.310	0.950	3
西药房	2.970	1.540	0.960	2
中药房	1.450	0.810	0.900	2

表 6 各科室的主要指标

科 室	指 标				
	$\bar{N}/人$	$\bar{N}/人$	\bar{W}/min	\bar{T}/min	\bar{F}
挂号室	10.6	11.5	5.7	6.1	0.07
内 科	3.5	7.8	4.6	10.2	0.55
妇 科	9.8	12.6	25.3	32.5	0.22
儿 科	4.6	7.1	12.3	19.0	0.35
口腔科	5.1	14.0	16.8	46.2	0.64
收费处	29.3	32.2	7.8	8.6	0.09
西药房	22.2	24.1	7.5	8.1	0.07
中药房	7.3	9.1	5.1	6.3	0.19

表 7 排队网络的主要指标

$\bar{N}/人$	$\bar{N}/人$	\bar{W}/min	\bar{T}/min	\bar{F}	$\bar{N}_{最大}$	$\bar{T}_{最大}$
60.4	70.7	34.6	48.9	0.29	81.8	75.3

5 结束语

由结果看出,挂号室、收费处、西药房排队现象严重,服务效率偏低,应增加服务台数.如挂号室,若增加一个窗口,平均队长就由 11.5 变为 1.6,服务系数则由 0.07 提至 0.39. 诊断科室

中,妇科、口腔科患者的逗留时间长,大夫的服务强度大.在医疗设施及服务台数不变时,可利用上述方法求出各指标值,作为门诊质量管理的参考.

参 考 文 献

- [1] 孟玉珂.排队论基础及应用.上海:同济大学出版社,1989. 63 ~ 102, 188 ~ 196
- [2] 华东师范大学数学系.概率论与数理统计教程.第二版.北京:高等教育出版社,1985. 338 ~ 345
- [3] 马 骏.现代医院管理.上海:上海科学技术出版社,1986. 489 ~ 590
- [4] 伊曼纽尔 帕尔逊著.随机过程.邓永录,杨振明译.北京:高等教育出版社,1987. 126 ~ 130

Analysis on queueing network of hospital outpatient service

Mi Hongjuan

(Department of Computer Science, Northwest Normal University 730070 Lanzhou PRC)

Abstract The article establishes the queueing model, presents some major targets of queueing network under balanced statistic condition and analyses the problem of optimization. Sample analysis is also conducted by utilizing the data collected from site observation. The research is done on the basis of queueing theory and under analysing the queueing network at clinics of several hospitals in Lanzhou.

Key words hospital outpatient service queueing theory queueing network optimization
(责任编辑 马宇鸿)

简 讯 ·

西北师范大学科研处与学报编辑部 联合召开校内作者会议

1998 年 2 月 26 日,西北师范大学科研处与学报编辑部就如何进一步搞好学校的科研工作、如何进一步提高学报质量为题,在本校办公楼 4 楼会议室联合召开了校内作者会议.全校各系、所主管科研的领导、中青年教学科研双优骨干、取得博士学位回校工作的青年教师共 78 人出席了会议.

科研处领导在会上介绍了学校科研工作的近况、上级主管部门及学校有关科研工作的具体政策、管理办法、各级科研课题的基本情况,要求全校教师、科研人员强化科研立项意识,积极、主动、多渠道地申请科研项目,并就有关问题提出了一些具体的要求.同时,强调了学报工作在学校教学科研中的重要作用,号召校内广大教师和科研人员关心和支持学报的工作.

学报编辑部的领导在会上介绍了《西北师范大学学报》文、理两刊近年来的发展概况.总体而言,两刊近年来学术、编校质量均有较大幅度的提高,较好地发挥了学报作为学术、科研的阵地、桥梁和窗口的作用.据“中国科技论文统计与分析源期刊计量指标”统计,1993 年西北师范大学理科各系、所作者在国内发表论文的总数为 94 篇,其中在学报上刊发的共 58 篇;1994 年在国内发表论文的总数为 126 篇,学报上刊发的共 85 篇;1995 年在国内发表论文的总数为 118 篇,学报上刊发的共 74 篇;1996 年在国内发表论文的总数为 124 篇,学报上刊发的共 74 篇.因此,学报对学校科研工作的发展起到了举足轻重的作用.最后,学报编辑部领导代表全体编辑人员衷心希望校内作者关心学报、支持学报,与全体编者齐心协力办好学报.

(理 宣)