

排队理论在车道收费系统中的应用研究

Application and Research of Queueing Theory in Lane Toll System

(中国科学院沈阳自动化研究所) 王 军 曹云侠

Wang, Jun Cao, Yunxia

摘要: 以排队理论为基础,研究了车道收费系统的排队模型及系统性能指标的评价方法,给出长青收费站 in 正常收费及繁忙时的性能参数;结合项目实例,给出了收费车道数的设计方法,并给出了车道数与设计小时交通量(DHV)的变化曲线;最后对以社会总费用为目标的车道数进行了优化设计。

关键词: 排队理论;车道;交通工程;优化

中图分类号: TP29

文献标识码: A

文章编号: 1008-0570(2005)10-3-0142-03

Abstract: Based on queueing theory, this paper studied the queueing model and evaluation methods of lane toll system, reduced the performance parameters of ChangQing toll station in ordinary and busy periods. Integrated with a project, brought forward the method to design the lane amounts and raised change curves of lane amounts and DHV. Then gave a optimization design aimed at social cost.

Key Words: queueing theory; Lane; traffic engineering; optimization

引言

排队是日常生活中经常遇到的现象,如顾客到商店购买物品、病人到医院看病,当要求服务的顾客数量超过服务机构的容量,即到达的顾客不能立即得到服务,就会出现排队现象。在高速公路收费站的入口或出口,车辆随机到达,排队后通过收费站的过程,可以用数理统计中的排队系统模型来进行描述,从而为收费车道数的设计提供理论基础。

1 排队系统模型

尽管排队系统千差万别,但都可以抽象为顾客到达服务台前,服务台有空闲便立刻进行服务,若服务台繁忙,则需等待服务台出现空闲时再接受服务,服务完成后离开服务台这样的过程。因此,排队系统可由图1表示:

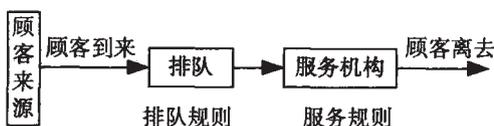


图1 排队系统模型

可见,排队系统由三个部分组成:输入过程,排队

规则,服务机构。

1.1 输入过程

输入过程指顾客按什么规律到达,一般从下列几个方面考虑:顾客源的组成;顾客到来的方式;顾客相继到达的时间间隔及顾客到达的独立性。在交通工程中,车辆的来源认为是无限的,车辆到达时间间隔是随机分布的,车辆到达收费站的规律一般服从泊松分布。

1.2 排队规则

排队规则指到达的顾客按什么规律接受服务,常见的有损失制和等待制。而等待制的服务次序常采用如下几种:先到先服务,这是常用的规则,以FCFS表示;后到先服务,如乘电梯的人常常后到先出,以LCFS表示;随机服务,以FIRO表示;有优先权服务,如救护车、消防车。

收费系统的排队服务规则为先到先服务,即FCFS。

1.3 服务机构

服务机构指同一时刻的服务台数和为顾客提供服务的服务时间类型。

服务台数可有1个或多个,在多个服务台的情形下,服务台可以是并行排列,也可以是串行排列;每次服务可以是对单个顾客服务,也可以对成批顾客服务,文献4对服务台的不同排列方式进行了讨论。为顾客提供的服务时间常服从一定的概率分布,常见的有定长分布和负指数分布。定长分布用d表示,负指数分布以M表示。

2 对车道排队系统进行建模

2.1 建立车道排队系统模型

当一个实际交通问题作为排队问题求解时,首先要确定它是属于那种类型,这就需要明确系统模型的表示方法,我们用如下的符号表示收费站排队系统: X/Y/Z/A/B/C。其中,X表示车辆到达的时间间隔分布类型,Y表示收费车道服务时间的分布类型,Z表示收费车道的数量,A表示收费站的容量,B表示车辆来源数目,C表示收费规则。通过前述分析,对于收费站排队系统,可以表示为车辆以泊松分布到达、负指数分布服务、N个服务台、排队不受限制、源为无限、先到先服务的模式,因此,建立的排队模型为: M/M/N / / 。

王军: 硕士研究生

基金资助: 辽宁省自然科学基金 20032009

中国自控网: <http://www.autocontrol.com.cn>

电话: 010-62132436, 62192616(T/F)

2.2 建立车道排队系统运行评价指标

为了对收费站排队系统的运行效率进行评价,研究其结构是否合理并依次提出改进措施,必须建立衡量排队服务系统的运行评定标准。通常依据的主要指标有:

(1)队长与排队长:队长指系统中总的车辆数,其期望值以 L_s 表示;排队长度指在系统中排队等候交费的车辆数,其期望值以 L_q 表示。 $L_s=L_q+$ 正在被收费的车辆期望值。

(2)排队时间与逗留时间:排队时间指一辆车从到达收费亭前起到开始交费时止这段时间,其期望指以 W_q 表示;车辆到达收费亭前到交费完成的这段时间称为逗留时间,其期望值以 W_s 表示, $W_s=W_q+$ 收费时间。 W_s 越大,服务率越低。

(3)忙期于闲期:从车辆到达空闲的收费车道起,到收费车道再次空闲的这段时间称为忙期;与忙期相对应的为闲期,在文献中有对此参数的详细讨论。

上述指标反映了车道排队系统工作状态,他们之间可以相互转换。设 λ 表示单位时间内平均到达的车辆数, μ 表示单位时间内交费完毕离去的平均车辆数,则 $1/\lambda$ 表示相邻两个车辆到达的平均间隔时间, $1/\mu$ 表示对每辆车的平均服务时间,根据 Little 公式可得 $L_s=\lambda W_s$, $L_q=\lambda W_q$, $W_s=W_q+1/\mu$, $L_s=L_q+\lambda/\mu$ 通过对这些指标的研究,并结合具体条件可以求得收费站最合适的规模,也可以对影响车道收费系统的要素进行适当控制,以取得较好的经济效益,在司机与公路投资者利益之间达到平衡。

3 车道排队系统模型的应用

3.1 利用车道排队模型对收费站性能进行评估

对于车道收费系统的排队模型 M/M/N/ ∞/∞ ,按排队方式的不同,又可分为单路排队多服务台排队系统和多路排队多服务台排队系统。

(1)多路排队多服务台排队系统,如图 2,

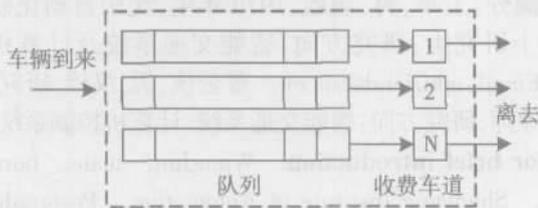


图 2 多路排队多服务台排队系统

车辆到达后在每个收费车道前排成一个队,每个排队只能接受其对应的一个收费车道提供的服务,不可随意选择收费车道,这是高峰时期车辆等候缴费通行的模型。此时车流量很大,每个收费车道前的队列与服务台一一对应,相当于 N 个单路排队单服务台排队系统并联。设车辆的到达率为 λN ,各车道的平均服务率为 u ,则每个车道到达率为 λ ,比率 $\rho=\lambda/u$ 称为系

统的服务强度或服务率。根据生灭的状态平衡方程可推导出系统的运行指标如下:系统中没有车辆的概率

$P(0)=1-\rho$;平均车辆数 $L_s=\frac{\lambda}{1-\lambda}=\frac{\rho}{1-\rho}$;系统平均队长

$L_q=\frac{\lambda^2}{u(u-\lambda)}=\frac{\rho^2}{1-\rho}$;平均逗留时间 $W_s=\frac{L_s}{\lambda}$;平均等待时间 $W_q=\frac{L_q}{\lambda}$ 。例如沈阳市大二环长青收费站,平均车道服务时间为 6s,4 车道,则对于 2100 辆/h 车流量,由上述公式可求得车道系统的指标: $u=3600/6=600$ (辆/s), $\rho=2100/4*600=7/8$, $P(0)=1-\rho=1/8$, $L_s=7$ (辆), $W_s=48s$, $L_q=6.125$ (辆), $W_q=42s$ 。

(2)单路排队多服务台排队系统,如图 3,

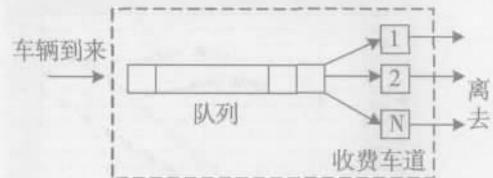


图 3 单路排队多服务台排队系统

车辆到达后排成一队,有 N 个车道提供服务,排队中头一个车辆可到任意空的车道缴费。这是正常通行时收费广场前车辆等候缴费通行时的模型。此时车流量不大,车辆可以自由选择收费车道。设车辆的到达率为 λ ,各收费车道的平均服务率为 u ,则 $\rho=\frac{\lambda}{uN}$,与多路排队类似,可求得:

没有车的概率 $P(0)=\left[\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{u}\right)^n + \frac{1}{N!(1-\rho)} \left(\frac{\lambda}{u}\right)^N\right]^{-1}$

系统平均车辆数 $L_s=\frac{(N\rho)^N \rho}{N!(1-\rho)^2} P(0) + \frac{\lambda}{u}$;平均排队长度

$L_q=L_s \frac{\lambda}{u} = \frac{(N\rho)^N \rho^2}{N!(1-\rho)^2} P(0)$ 。同样 2100 辆/小时车流量,对

上述的长青收费站可求得在正常情况下车道收费系统的性能指标: $u=3600/6=600$ (辆/s), $\rho=2100/(600*4)=7/8$, $P(0)=0.01475$, $L_q=5.16$ (辆), $W_q=8.85s$, $L_s=6.87$ (辆), $W_s=11.78s$ 。对照多路排队系统的计算结果可见,单路排队时收费站的性能较好,尤其是 W_q 与 W_s 较明显,这是因为高峰车流时,多路排队系统受到排队车道与收费车道一一对应的限制,不允许司机随意改换车道交费;而在正常的时间,司机看到有空闲的车道,即可以去交费,因而,在设计收费站时,应采用单路排队系统。

3.2 利用车道排队模型设计车道数

利用排队系统不仅可以对已建的收费站的服务水平和系统性能进行评估,也可以对将要建的收费车道数进行定量计算。

例如沈阳市大二环改造项目中,给定设计参数如下:设计小时交通量 $DHV=2400$ 辆/小时,平均服务时间 $t=6$ 秒,单车道平均等待车辆数 $L_{q1}=1$ 辆,则用如下方法可求最小车道数 N:

$\lambda=2400, \mu=3600/t=600, \rho=\frac{\lambda}{\mu N}=4/N$, 由于要求 $\rho < 1$, 所以 $N \geq 5$, 假设 $N=5$, 则 $\rho=4/5, P(0)=0.012987, L_q=\frac{4^5 \cdot 4/5}{5!(1-4/5)^2} P(0) \approx 2.2$, 每条车道平均等待车辆数 $L_{q1}=L_q/N=2.2/5 < 1$, 满足要求。所以, 当 $N=5$ 时满足设计要求。

利用文中给出的公式, 可以计算出设计小时交通量 DHV, 平均服务时间 t , 平均等待车辆数 L_q 及车道数 N 的关系, 本文给出 L_q 为 1 辆及 2 辆时, 平均服务时间 t 分别为 6s, 8s 时的设计小时交通量 DHV 与车道数 N 的变化曲线图(图 4)。

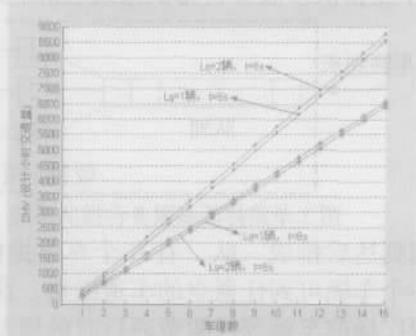


图 4 设计小时交通量与车道数的变化曲线图

由图 4 可见, 增加车道数和提高服务水平都可以扩大收费站的容量, 但是, 在车道数一定的情况下, 就需要通过提高收费系统的服务水平来扩大收费站的容量, 因此, 很多大城市及负荷量较大的高速公路都在进行不停车收费的试验, 这也是以后的公路收费系统发展的必然趋势。

3.3 运用车道排队模型进行系统优化设计

一般情况下, 司机总希望能够立即进入收费车道进行缴费, 而且在系统中逗留的时间越短越好, 这就需要增加收费车道的数量, 提高收费效率, 但这将增加收费站的成本; 另一方面, 收费站的经营者总希望收费站达到最高的使用效率, 这必然导致驾驶员逗留时间的增加。从社会效益来考虑, 收费站系统的总费用是服务机构的服务费与车辆逗留的费用之和, 优化系统设计的目的应该是使总费用最小。

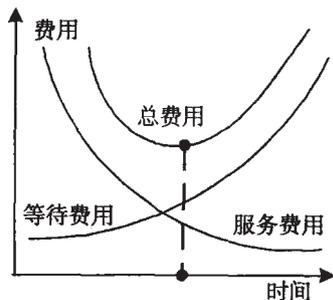


图 5 费用与时间变化曲线

如图 5 所示, 车道的服务费用是服务时间的减函数, 司机的等待费用是逗留时间的增函数, 现在就要找到使总费用最小的那个点。

对于收费排队模型 $M/M/N/ /$, 单位时间总费用的期望值为 $T(N)=T_s N+T_w L_s(N)$, 式中, T_s 为每收费车道单位时间的服务费用, 若收费方式确定, 则此值确定; T_w 为单位时间每辆车的等待费用, 为一确定值, 文献 8 中对此细分为货物时间费用、旅客时间费用、燃油消耗费用, 并给出了货币化计算公式; $L_s(N)$ 为系统中平均车辆数, 是 N 的函数, 现在的目标是求车道数 N^* , 使 $T(N^*)$ 为最小。本文采用边界法求 N^* 。因为 $T(N^*)$ 最小, 所以有 $T(N^*) \leq T(N^* - 1), T(N^*) \leq T(N^* + 1)$, 将以上两式代入 $T(N)$ 中, 化简得: $L_s(N^* - 1) - L_s(N^*) \leq T_s / T_w, L_s(N^*) - L_s(N^* + 1) \leq T_s / T_w$; 因为 T_s, T_w 已知, L_s 是 N^* 的函数, 所以, 可求得满足 (2) 与 (3) 的自然数 N^* , 即求得使系统最优化的车道数。

4 结论

利用车道收费系统的排队模型, 可以对收费站进行评估及设计, 根据系统的具体要求, 可以对实际系统进行优化。排队理论适合用来分析和研究像车道收费这类的随机现象, 本文建立的车道排队模型在车道自动收费系统中有实际应用意义。

参考文献:

[1] Donald Gross, Carl M. Harris. Fundamentals of Queueing Theory [M]. New York: Wiley, 1998.
 [2] 孟玉珂. 排队论基础及应用 [M]. 上海: 同济大学出版社, 1989.
 [3] 佐佐木冈, 饭田恭敬. 交通工程学 [M]. 北京: 人民交通出版社, 1998. 113—141.
 [4] 吴庆标, 黄新贤, 韩玉娟. 基于优先级服务的排队系统模型的计算机模拟研究 [J]. 计算机应用研究, 2004, 21(4): 14-16.
 [5] 郭敏. 高速公路收费系统 [M]. 北京: 人民交通出版社, 2002.
 [6] 孙荣恒. M/M/1 排队系统的忙期 [J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2003, 26(2): 151-155.
 [7] 中国科学院沈阳自动化研究所. 沈阳市大二环路桥收费系统系统设计文件(3) [Z]. 沈阳, 1999.
 [8] 贾洪飞, 隗志才, 姚宏伟, 等. 电子收费系统(ETC)社会效益分析 [J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(7): 121-127.

作者简介: 王军, 男, 满族, 1979 年生, 沈阳自动化研究所硕士研究生; 研究方向: 智能交通系统及计算机应用。Email: mkfriend@sia.cn。曹云侠, 男, 汉族, 研究员, 硕士导师, 研究方向: 智能交通系统、计算机控制系统。

Author brief introduction: Wang Jun, male, born in 1979, Shenyang Institute of Automation, Postgraduate student; Major Research: Intelligent Transport System and Application of Computer. Cao Yunxia, male, professor, major research: Intelligent Transport System and Computer Control System.

(110016 沈阳中国科学院沈阳自动化研究所) 王军
曹云侠

联系方式:

(110016 沈阳自动化研究所第五研究室) 王军

(投稿日期:2005.3.9) (修稿日期:2005.3.15)

技术创新