

制动机控制方法分析

摘要

制动机是衡量汽车整体性能的一个非常重要的指标,在汽车研发阶段能否在试验台上真实的模拟汽车路试时车轮转动的过程,是检验制动机性能好坏的关键。我们的目标是建立合理的电动机驱动电流控制模型,使得试验台上主轴在制动过程中和路试时车轮的转动始终保持一致。

首先我们建立车辆路试时具有的能量和主轴转动能量等效的模型,在等效模型的基础上我们计算出问题一中等效的转动惯量为 $52\text{kg} \cdot \text{m}^2$, 问题二中需要补偿的惯量为 $12\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 或 $-18\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。

其次推导了驱动电流依赖于可观测量的数学模型: $I = K \frac{J_v - J_m}{J_v} T_B$, 利用此模型计算出问题三中的驱动电流 174A 或 -262A, 并且基于此模型给出了本时段电流值根据前一时段观测值的计算机控制方法: $I(t_k) = K \frac{J_v - J_m}{J_v} T_B(t_k)$ 。对于控制方法的评价指标我们采用的是能量误差大小, 建立了控制方法的评价体系: 在时间步长 $\Delta T = 0.01\text{s}$ 的情况下用相对误差 ρ 的大小将控制方法分为优, 良, 差三等, 作为统一的评价标准。按照我们的评价体系, 根据附表数据求得问题四中的某种控制方法的 $\rho = 6.05\%$, 给出的评价是差; 对于我们在问题五中给出的控制方法的评价为优。我们利用计算机模拟的方法计算出不同控制方法下制动机的能量误差, 对这些数据进行统计分析可以得到控制方法的稳定性和精确性。

最后, 对于问题五中 $I(t_k)$ 控制方法的后效性, 当我们将时间步长 ΔT 取值逐渐增大时 ρ 也随之增大, 如取 $\Delta T = 0.1\text{s}$ 时, 得 $\rho = 22\%$, 按照 $\Delta T = 0.01\text{s}$ 情况下的评价体系其评价却为差, 故其并不具有普遍实用性。对此, 我们通过灰色预测模型给出下时段制动扭矩的预测值 $\overline{T}_B(t_{k+1})$, 给出新的控制方法 $I(t_k) = K \frac{J_v - J_m}{J_v} \overline{T}_B(t_{k+1})$, 对于不同 ΔT 通过多次计算机模拟, 其后效性明显减弱, 稳定性很好。试验台可以视为具有反馈和后效性的系统, 这样具有自适应性的控制模型会得到较好的结果。我们通过大量的测试数据得到不同控制方法下的能量误差, 对不同法进行比较后得到了较好的评价标准。

关键词: 制动器 驱动电流 计算机模拟 评价方法 灰色预测 神经网络

1 问题重述

汽车研制过程中制动器的设计是车辆设计中最重要的一环之一，直接影响着人身和车辆的安全。为了检验设计的优劣，必须进行相应的测试。但是，车辆设计阶段无法路试，只能在专门的制动器试验台上对所设计的路试进行模拟试验。模拟试验的原则是试验台上制动器的制动过程与路试车辆上制动器的制动过程尽可能一致。模拟的方法是将汽车平动时的制动机制动汽车的过程，转化为是试验台上制动机制动由主轴和飞轮组组成的机组的过程，车辆在路试时的能量和车轮转动的状态可以被模拟为主轴和飞轮组共同具有的转动能量和主轴的转动变化。通常试验台上主轴和飞轮组组成的机组的转动惯量并不是连续的，只能为一些离散的值，而要想精确的模拟路试时汽车具有的能量，只能通过电机对主轴施加一定的作用力来补偿主轴和飞轮组相对真实情况下转动惯量不足而缺少的能量。

在模拟路试时，我们事先可以知道汽车平动时具有的能量在转换为主轴转动时机组所具有相同能量时机组需要达到的转动惯量。在制动机制动主轴转动的过程中，我们可以离散的观测到主轴的瞬时扭矩和转速，根据这些信息来控制下一时间段内电机施加在主轴上的扭矩的大小，来补充机组缺失的转动惯量，使得模拟能够接近真实路试的过程。

评价控制方法优劣的一个重要数量指标是能量误差的大小。

2 问题分析

在车辆设计时，我们不可能用整部汽车来检测制动机的性能，一般我们只能通过观察制动机制动一个车轮时的过程，我们想模拟汽车在不受任何外界作用力下（假设汽车在制动时不会发生滑动）仅由制动机制动车轮达到减速的效果，但是怎样能精确的模拟路试时车轮转动的变化却又非常的困难，这是因为我们是在试验台上来模拟车轮转动，车轮并不是路试时的向前滚动而是主轴固定的转动，主轴的减速过程和路试时车轮的减速过程往往是不一样的，这是由于主轴和飞轮组共同具有在相应的速度下具有的能量和车辆路试时不一样，我们只能通过添加驱动力来弥补这一缺失。但是由于制动机的性能的复杂性，我们是无法精确的控制好电机施加在主轴上的扭矩的大小，只能是根据已有的主轴瞬时转速和扭矩来制定下一段时间内电机的扭矩。我们的核心目标就是设计电流的控制方法以及对它的控制效果进行评价，从而找到相对较好的控制方法，使在试验台模拟路试时制动器的制动过程和路试时一致。

3 模型假设

1. 制动器的制动性能稳定，在各次制动过程中制动力矩呈现相同的变化规律
2. 路试时轮胎与地面的摩擦力为无穷大，因此轮胎与地面无滑动
3. 路试时汽车具有的能量为汽车平动时具有的动能，忽略车轮自身转动具有的能量
4. 不考虑观察误差，随机误差和连续问题离散化所产生误差
5. 主轴和飞轮组的转动为刚体转动

4 符号约定

T_B : 制动器制动力矩;
 T_A : 电动机的驱动力矩;
 ω : 主轴的角速度;
 β : 转动角加速度;
 J_v : 换算到制动轴上的转动惯量 (等效转动惯量);
 J_m : 机械惯量
 J_s : 电动机模拟的转动惯量——补充不足的 ($J_v - J_m$);
 n : 转速;
 v : 速度;
 ΔT : 时间步长;
 K : 驱动电流与的扭矩的比例系数;
 W_Z : 制动器做功;
 W_E : 电动机做功;
 I : 电动机驱动电流

问题 1 求解等效转动惯量

5.1 等效模型的建立

题目中的问题是建立有效的电机控制机制,从而使电机产生一定扭矩来补偿主轴和飞轮组所缺少的转动惯量。这是建立在主轴和飞轮组组成的机组在转动过程中能量与主轴转动的变化规律,和路试时汽车自身的动能改变和车轮的减速过程是一致的。我们首先建立试验台上模拟汽车路试时的等效模型,这里我们要说明两点:1 当主轴和飞轮组的机械转动惯量和汽车路试时等效的转动惯量相等时,在制动过程中主轴的转动和能量变化同路试情况是一致的,无需施加外界的控制;2 当主轴和飞轮组的机械转动惯量无法达到等效的转动惯量时,缺少的转动惯量可以通过电机施加在主轴上的扭矩来补充,这是由于扭计的可加性,电机相对于制动机则在做负功增大了制动机的负荷。

5.2 模型建立

主轴和飞轮组转动过程中具有的能量 $E(t)_{机}$ 和汽车平时时具有的能量 $E(t)_{车}$ 始终相等:

$$E(t)_{机} = E(t)_{车}$$

由物理学中刚体的转动定律可知,主轴上的扭矩具有可加性,而电机施加在主轴上的扭矩可以被认为增加了主轴所具有的转动惯量,其关系式为:

$$T_B - T_A = J_v \omega(t)$$

其中主轴转动时主轴和飞轮组所具有的能量 $E(t)_{\text{机}} = \frac{1}{2} J_v \omega^2$

5.3 对于问题一的求解

根据等效模型

通常情况下，我们是通过载荷 $G_{\text{载荷}}$ 来衡量汽车平时具有的动能

$$\begin{cases} mg = G_{\text{载荷}} \\ E(t)_{\text{车}} = \frac{1}{2} mv^2(t) = \frac{1}{2} \frac{G_{\text{载荷}}}{m} v^2(t) \end{cases}$$

车轮在制动时承受载荷，而相对试验台上主轴和飞轮组的转动惯量

$$J_v = m \cdot r^2$$

r 为车轮的滚动半径， m 为具有 G 载荷时车辆的质量，带入数据求解得 $J_v = 51.9989 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，我们取近似 $J_v = 52 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

问题二 电动机要补偿的惯量

5.4 对于问题二的求解

主轴自身的基础惯量已知为 $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

钢制飞轮具有的转动惯量为

$$J = \frac{\rho \cdot \pi (R_1^2 - R_2^2) d}{2} * (R_1^2 + R_2^2)$$

其中， ρ 为飞轮钢材密度， R_1 ， R_2 分别为飞轮的外内半径， d 为飞轮厚度。

代入数据算出 3 个飞轮的转动惯量分别为 $30.0083 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $60.0166 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $120.033 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，近似取为 $30.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $60.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $120.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。则可以组成 10, 40, 70, 100, 130, 160, 190, 220 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 的 8 种数值的机械惯量。

而电动机能补偿的能量相应的惯量的范围为 $[-30, 30] \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，因此要达到第一问等效转动惯量 $52 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，可以设定机械惯量为 $40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，还需要电动机补偿 $12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的转动惯量，或设定机械惯量为 $70 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，电机补偿的 $-18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的转动惯量。

问题三 驱动电流依赖于可观测量的数学模型

6. 模型建立

在制动器试验台模拟路试实验时，要满足如下的原则：

路试时的的车辆平动时所具有的能量等效的转化为试验台上飞轮和主轴等机构时具有的能量。

由于试验台不一定能正好做到提供的机械惯量和在路试车辆时等效惯量，从而采用电动机在一定的电流控制下参与工作，补充由于机械惯量不足而缺少的能量。在制动的任意 $t_1 \sim t_2$ 时间内，制动机做功

$$W_Z = \int_{t_1}^{t_2} T_B \omega dt \quad (1)$$

制动力矩

$$T_B = J_v \frac{d\omega}{dt} \quad (2)$$

将(2)式带入(1)式得

$$W_Z = \frac{1}{2} J_v (\omega_2^2 - \omega_1^2) \quad (3)$$

电动机以其产生的扭矩 T_A 做功的形式来补充机械惯量不足而缺少的能量，同时 T_A 要满足与(1)式相一致的做功形式来补充能量才能保证精确模拟的效果。

由符号约定知

$$J_v = J_m + J_s \quad (4)$$

将(2)，(4)式带入(1)式得

$$W_Z = \int_{t_1}^{t_2} J_v \frac{d\omega}{dt} \omega dt = \int_{t_1}^{t_2} (J_m + J_s) \omega dt = \int_{t_1}^{t_2} J_m \omega dt + \int_{t_1}^{t_2} J_s \omega dt \quad (5)$$

根据(5)式及 T_A 满足的原则可知， $\int_{t_1}^{t_2} J_s \omega dt$ 部分的能量需由电动机驱动产生，而电动机做功

$$W_E = \int_{t_1}^{t_2} T_A \omega dt \quad (6)$$

从而导出驱动力矩与补充力矩的关系

$$T_A = J_s \frac{d\omega}{dt} \quad (9)$$

由(2)与(9)相比得

$$T_A = \frac{J_s}{J_v} T_B = \frac{J_v - J_m}{J_v} T_B \quad (10)$$

驱动电流 $I = K T_A$

由以上分析从而可推出电动机电流依赖于可观测量 T_B 的数学模型：

$$I = K \frac{J_v - J_m}{J_v} T_B$$

6.1 模型补充：

如果 J_v 大于 J_m ，即试验台所提供的机械惯量小于所模拟的等效的转动惯量，从而电流做正功补充不足的能量

如果 J_v 小于 J_m ，即试验台所提供的机械惯量大于所模拟的等效的转动惯量，从而电流做正负功消耗多余的能量

6.2 问题的求解

初速度 $v_0 = 50\text{km/h}$ ，匀减速 $t=5\text{s}$ 后的末速度 $v_{\text{末}} = 0$ ，而车轮半径 $r=0.286\text{ m}$ ，从而得角速度的值 $\beta = \frac{v_0 - v_{\text{末}}}{t \times r} = 2.778$

由问题二，当机械惯量 $J_m = 40\text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，所得的补偿惯量 $J_s = J_v - J_m = 12\text{ kg} \cdot \text{m}^2$

将 $T_B = J_v \beta$ 代入上述模型得 $I = K (J_v - J_m) \beta$ ，其中 $K = 1.5\text{ A/N} \cdot \text{m}$ 从而代入数据可解得驱动电流 $I=174.825\text{ A}$

当机械惯量 $J_m = 70\text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，所得的补偿惯量 $J_s = J_v - J_m = -18\text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，代入数据解得驱动电流 $I=-262.238\text{ A}$

问题 4 对于驱动电流的计算机控制方法的评价

7 评价标准的函数建立

评价控制方法优劣的一个重要指标是能量误差的大小，而这里的能量误差是指所设计的路试时的制动器与相对应的试验台上制动器在制动过程中消耗的能量差，基于此标准给出按照如下两种能量差原则给出能量差公式：

原则一

路试时制动器在整个路试过程中消耗的总能量减去在试验台上制动器在整个制动过程中消耗的总能量作为总的能量差，而在路试时消耗的总能量(即制动器做的功 $W_{Zl}(I)$)就是车轮或者说是车辆机械能变化量 ΔE_1 ，而在模拟时试验台上制动器消耗的能量 $W_{Zs}(s)$ 由能量转化与守恒原理知应是试验台上飞轮与主轴机械能变化量 ΔE_2 和驱动电流做功 W_E 之和，即 $W_{Zs} = \Delta E_2 + W_E$ ，从而得能量差公式

$$\Delta W = |W_{Zl} - W_{Zs}| = |\Delta E_1 - \Delta E_2 - W_E|$$

原则二

将每一小的时间段 T 内路试时制动器在整消耗的能量减去在试验台上制动器在制动过程中消耗的能量差的绝对累加作为总的能量差，而在 $t_{k-1} \sim t_k$ 时间段内

$$W_{Zl}(t_k) = \Delta E_1(t_k)$$

$$W_{Zs}(t_k) = W_E(t_k) + \Delta E_2(t_k)$$

$$\Delta W(t_k) = |W_{Zl}(t_k) - W_{Zs}(t_k)| = |\Delta E_1(t_k) - \Delta E_2(t_k) - W_E(t_k)|$$

总的能量差

$$\Delta W = \sum \Delta W(t_k) = \sum |W_{Zl}(t_k) - W_{Zs}(t_k)| = \sum |\Delta E_1(t_k) - \Delta E_2(t_k) - W_E(t_k)|$$

直接基于上述的能量的绝对误差只能比较不同的控制方法对于同一个模拟试验的控制的优劣程度，而对于不同的制动器以及不同模拟对象这种绝对能量差的评价是不适用的

因而对于更一般的情况，相对能量误差可以做到对控制方法的统一的评价，分析不难得出相对能量误差

$$\rho = \frac{\Delta W}{W_{Zl}} \quad \text{或者} \quad \rho = \frac{\Delta W}{W_{Zs}}$$

由于路试时的做功可以较为精确的确定，我们采用 $\rho = \frac{\Delta W}{W_{Zl}}$ 作为我们的评价标准函数，在此基础上给出控制方法优劣的统一评价标准（只是步长在 $T=0.01\text{s}$ ，在 T 取其

它值的情况下并不适合)

ρ	$\leq 0.1\%$	$\leq 1\%$	$\geq 1\%$
等级	优	良	差

7.1 本问题中控制方法的评价

7.1.1 试验台上制动机能量损耗的统计

在计算试验台上制动机在制动过程中损耗的能量

$$W_Z = \sum_i T_B * \Delta\theta$$

其中 T_B 为制动机的顺势扭矩，

我们认为当 ΔT 时间段很小时，主轴角速度 ω 的变化为恒定角加速度运动则

$$\Delta\theta = \omega_0 * \Delta T + \frac{1}{2} \alpha * \Delta T^2$$

7.1.2 模拟路试时车辆能量的变化

通过统计主轴转速变化规律模拟路试时车辆运动情况：

在假定制动机是恒定制动情况下，汽车减速过程是匀减速运动。

我们通过查阅大量资料发现，汽车减速过程大致可以近似为匀减速直线运动，虽然实际情况并不是这样，制动机的扭矩从制动开始到结束并不是稳定的，但从整体上看误差并不是很大。

可以利用最小二乘法，拟合出车轮转速的变化曲线，这样就能知道路试时车路任意时刻的转速，以此作为汽车路试时运动情况的近似处理。

在已知初始速度和离散时间段中扭矩的变化模拟路试车辆的运动情况：

试验中测量得到的主轴扭矩即为路试时制动机的扭矩。

在已知初始转速 ω_0 ，则模拟重现路试时车轮只在制动机作用下转速的变化如下：

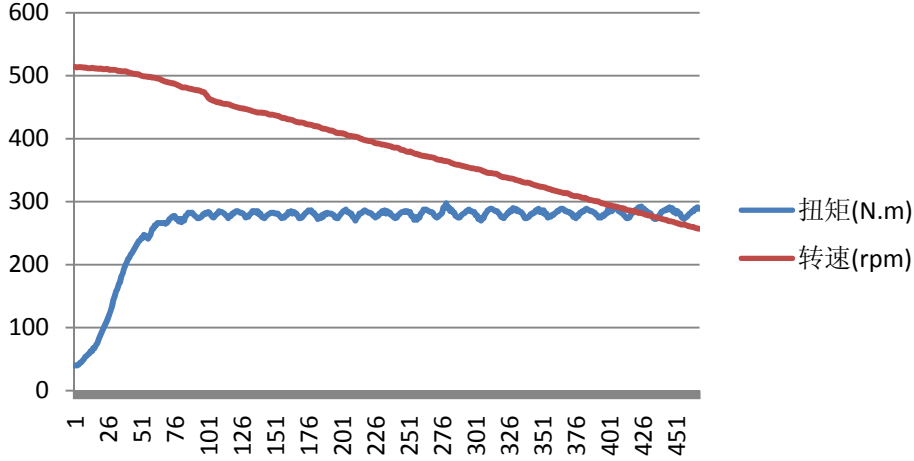
$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{T_B}{J_V} * \Delta T$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} - \frac{T_B}{J_V} * \Delta T$$

其中 T_B 为 i 时刻在试验台上测得瞬时扭矩， J_V 为等效转动惯量。

7.2 问题（4）的求解

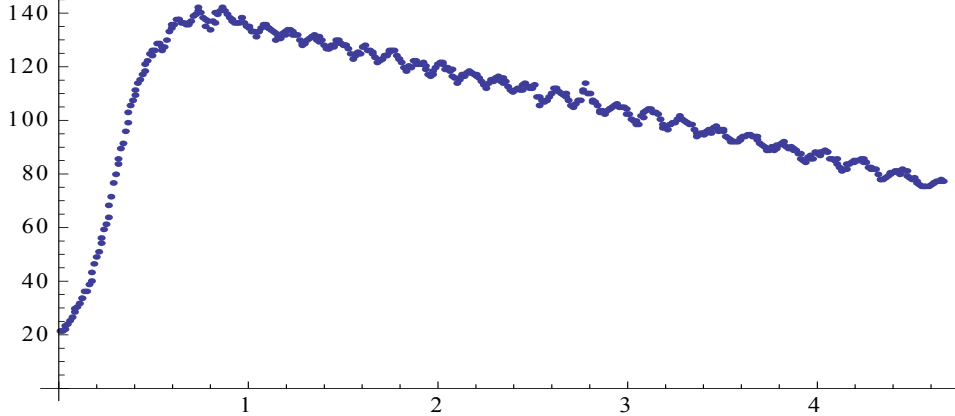
利用软件 Mathematic 对实验数据进行处理。



整体计算制动机制动前后能量的变化

1. 主轴的出转速为 514rpm，末转速为 257rpm
2. 试验台上制动机做工过程如下

通过累加计算离散时刻内制动机做的功 $W_Z = 48992.1J$



3. 主轴在制动过程中损失的能 $W_{制} = \Delta E_{机} = \frac{1}{2} J_v \omega_0^2 - \frac{1}{2} J_v \omega_n^2 = 52150.2J$
4. 能量误差为 $\Delta W = |W_Z - W_E| = 3157.9J$

$$\rho = \frac{\Delta W}{W_Z} = 6.05\%$$

模拟路试时车辆能量变化，计算累计能量误差

5. 对转速利用最小二乘法进行曲线拟合得到转速变化规律为：

$$\omega = 54.889 - 6.01032 t$$

6. 计算逐差累加后的能量误差

$$\sum_i \left| T_B * \Delta \theta - \left(\frac{1}{2} J_v \omega_{i-1}^2 - \frac{1}{2} J_v \omega_i^2 \right) \right| = 5812.08J$$

根据题目中的数据，模拟路试时单独由制动机制动时车辆能量的变化

7. 忽略误差的影响，实验得到的主轴扭矩即为路试制动机扭矩的变化情况

根据初始转速 $\omega_0 = 53.860 \text{ rad/s}$ 和递推关系

$$\omega_i = \omega_{i-1} - \frac{T_B}{J_v} \Delta T$$

可以模拟出路试汽车能量的变化 $W_{\text{制}} = \sum_i (\frac{1}{2} J_v \omega_{i-1}^2 - \frac{1}{2} J_v \omega_i^2)$

8. 能量误差为 $W_{\text{制}} = \sum_i |T_B * \Delta\theta - (\frac{1}{2} J_v \omega_{i-1}^2 - \frac{1}{2} J_v \omega_i^2)| = 1568.81J$

问题 5 基于问题 3 中模型的电流的计算机控制方法的设计及其评价

8. 计算机控制方法的设计

在计算机控制电流输出过程中，由于制动器在制动过程中制动力矩 T_B 变化规律的复杂性，因而不能事先预知 T_B 及其变化规律，想要真实的模拟路试制动过程，在整个制动过程中驱动电流 I 和制动力矩 T_B 必须满足 $I = K \frac{J_v - J_m}{J_v} T_B$ ，因而驱动电流也无法给出在整个制动过程中和时间之间的精确关系，本文采用将整个制动时间离散化为许多个小的时间段，以 $T=0.01s$ 为一段，在试验台工作时可每隔 T 时间观测出主轴的瞬时转速 n 和瞬时扭矩，而主轴的瞬时扭矩就是制动力矩 T_B ，这样对于驱动电流可以根据 $t_{k-1} \sim t_k$ 末的观测到的 $T_B(t_k)$ 和 $\omega(t_k)$ 以确定下一时段 $t_k \sim t_{k+1}$ 内的驱动电流 $I(t_k)$ ，由第三问推导出的驱动电流的确定公式为 $I = K \frac{J_v - J_m}{J_v} T_B$ ，可以很容易的确定每一时段的电流值的计算机控制方法： $I(t_k) = K \frac{J_v - J_m}{J_v} T_B(t_k)$

同时 $I = K \frac{J_v - J_m}{J_v} T_B = K \left(T_B - J_m \frac{T_B}{J_v} \right) = K \left(T_B - J_m \frac{d\omega}{dt} \right)$ ，对于角速度变化率 $\frac{d\omega}{dt}$ 我们可以才用前一段的平均角速度变化率 $\frac{\omega(t_{k-1}) - \omega(t_{k-2})}{T}$ ，从而可推导出根据另外一个相类似驱动电流的计算机控制方法： $I(t_k) = K \left(T_B - J_m \frac{\omega(t_k) - \omega(t_{k-1})}{\Delta T} \right)$ ，

上述计算机控制方法的评价：

8.1 制动机扭矩变化的计算机模拟：

去评价一种控制方法的好坏，是可以通过计算机进行模拟的，而计算机模拟最关键的问题是真实的再现制动机扭矩在路试时的变化过程，我们可以通过实际测量得到制动机扭矩的变化过程，如题目中所给的扭矩即为制动机一次制动过程中扭矩的变化，但是我们却不能去无限的测量数据，而且测量得到的数据并不一定能反映制动各种状态下的性能，这里我们采用计算机模拟的方法来评价我们设计的控制方法的好坏。

8.1.1 数据处理：

1. 将题目中的数据导入 Mathematic，得到制动机扭矩的散点图。
2. 通过最小二乘法采用函数 $f(x) = a - b * e^{-r*x}$ 来拟合数据得到拟合结果为

$$g(x) = 283.492 - 302.732 * e^{-3.27981*x}$$

其中最大误差 $E_w = 59.24$ 均方根误差 $E_1 = 10.5344$ 平局误差 $E_2 = 0.00026$

我们提取出起始部分模拟数据和真实数据间的误差如下：

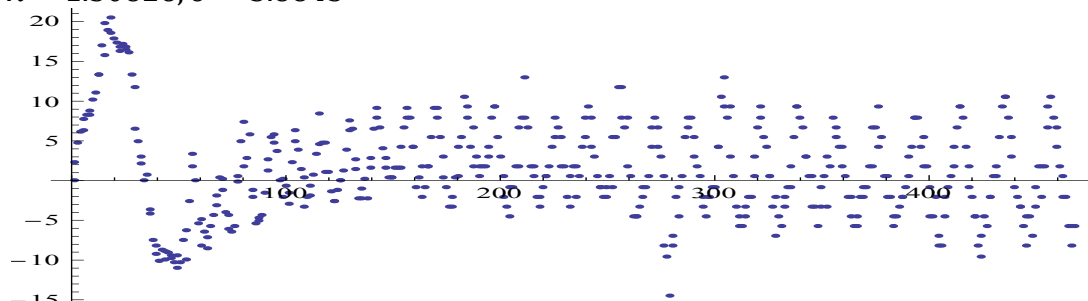
-59.24, -49.4739, -40.0228, -32.1266, -25.7755, -18.4599, -12.6706, -7.14879, -3.13572, 3.12691, 7.89718, 13.6829, 16.7417, 23.3308, 24.7073, 30.8782, 31.8499, 35.1291, 34.4717, 34.884, 35.1217,

可以看到起始部分数据拟合并不好

3. 我们采用 Logistic 函数来模拟，得到的模拟结果为

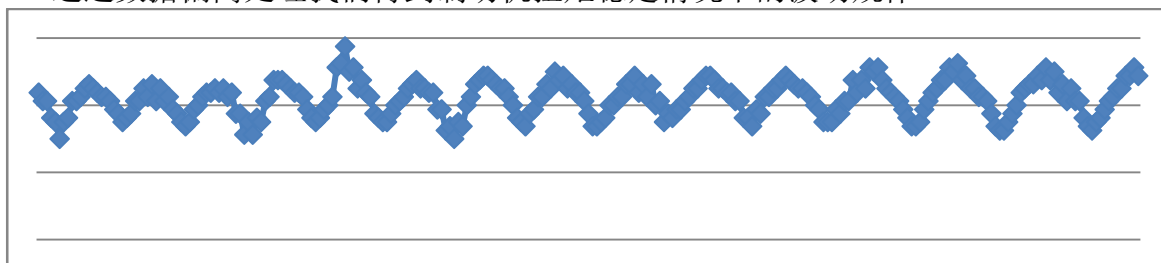
$$f(x) = \frac{283}{1 + \left(\frac{283}{40} - 1\right) * e^{-3.27918 * x}}$$

其中最大误差 $E_w = 20.5614$ 均方根误差 $E_1 = 5.8843$ 平局误差 $E_2 = 1.50826$
 我们可以通过函数 $f(x) + \eta$ 来模拟制动机扭矩, η 为随机因子 η 满足正态分布
 $\lambda = 1.50826, \sigma = 5.8843$



我们采用偏离和你合度较好的 $f(x)$ 来作为模拟时的基准函数

4. 通过数据偏离处理我们得到制动机扭矩稳定情况下的波动规律



近似为正弦函数, 则我们也可以采用

$$f(x) + \tau \sin(\gamma x)$$

其中 τ 为幅度变化因子, γ 为周期系数, 来模拟制动机扭矩变化过程

通过残差分析和数据统计我们设定 $\tau = 13, \gamma = 0.17453$

8. 1. 2 对于控制方法的计算机模拟评价:

以上得到的制动机扭矩模拟函数是针对问题中给出的数据进行的模拟处理, 其中 $f(x) + \tau \sin(\gamma x)$ 的得到是很具有偶然性, 我们在查阅了大量资料后得知, 多数时间下只用正态随机分布的方式就可以得到很好的结果。

计算机模拟具体方法如下:

模拟结果如下

次数 名称	1	2	3	4	5
W_{Z1}	50824.3	50864.3	50868.1	50847.5	50818.2
W_{Zs}	50800.1	50841.6	50845.4	50824.5	50795.2
ΔW	24.2	22.7	22.7	23	23
ρ	0.0477%	0.0447%	0.0446%	0.0451%	0.0454%

通过上述计算机模拟结果可知, 五次重复所得 ρ 值都小于0.1%, 在时间步长取 $\Delta T = 0.01$ 的前提下, 以我们给出的评价标准知驱动电流的控制方法 $I(t_k) = K \frac{J_v - J_m}{J_v} T_B(t_k)$ 的等级是优。

同时通过比较五次重复模拟所得每个量的数据, 其并没有太大的变化, 计算出的 ρ 值

也没有太大变化，控制方法是比较稳定的。

问题 6 控制方法的改进与评价

问题 5 中的控制方法 $I(t_k) = I(t_k) = K \frac{J_v - J_m}{J_v} T_B(t_k)$ 不足之处：

式中 $T_B(t_k)$ 只是 t_k 时刻的制动力矩，用来作为 $t_k \sim t_{k+1}$ 时间里的制动力矩来给出 $I(t_k)$ ， $I(t_k)$ 会产生后效性误差，当时间步长 ΔT 选取较大时，其所有时段的后效性误差之和是很大的，对此我们通过对问题 5 中计算机模拟中，主要参量中只将 ΔT 由 0.01 修改为 0.1，其模拟计算结果如下：

次数 名称	1	2	3	4	5
W_{Z1}	62912	63095.7	62614.3	62970.7	63053
W_{Zs}	49013	49100	48842	49034.8	49000.2
ΔW	13899	13955.7	13772.3	13935.9	14052.8
ρ	22.09%	22.18%	21.99%	22.13%	22.19%

通过对于问题的分析，采用根据已经测得前面各个时段 $T_B(t_i)$ ， $i=1, 2 \dots k-1$ ，采用灰色预测 GM(1, 1) 模型给出下一时段的 $T_B(t_k)$ 。具体如下

制动扭矩 T_B 前 k 个时段的观测值， $T_{B0} = \{T_B(t_1), T_B(t_2) \dots T_B(t_k)\}$ ，通过累加生成一次累加序列 $T_{B1} = \{T_{B1}(t_1), T_{B1}(t_2) \dots T_{B1}(t_k)\}$ 。则 GM(1, 1) 相应的微分方程为：

$$\frac{dT_{B1}}{dt} + \alpha T_{B1} = \mu$$

式中， α 为发展灰数； μ 为内生控制灰数。

设 a 为待估参数向量， $a = \begin{pmatrix} \alpha \\ \mu \end{pmatrix}$ ，利用最小二乘法可得：

$$a = (A^T A)^{-1} A^T Y_k$$

$$\text{其中 } A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} (T_{B1}(t_1) + T_{B1}(t_2)) & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{2} (T_{B1}(t_{k-1}) + T_{B1}(t_k)) & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$Y_k = [T_B(t_2) \dots T_B(t_k)]^T$ ，通过求解微分方程，可得预测模型，即 GM(1, 1) 的模型：

$$\overline{T_{B1}}(t_{k+1}) = (T_B(t_1) - \frac{\alpha}{\mu}) e^{-\alpha k} + \frac{\alpha}{\mu}$$

将上述累计结果还原，即可得到预测值：

$$\overline{T_B}(t_{k+1}) = \overline{T_{B1}}(t_{k+1}) - \overline{T_{B1}}(t_k)$$

将灰色预测模型预测的 $\overline{T_B}(t_{k+1})$ 作为 $t_k \sim t_{k+1}$ 时间内制动力矩，代入问题 3 中的驱动电流模型中，可推得如下的计算机驱动电流控制方法：

$$I(t_k) = K \frac{J_v - J_m}{J_v} \overline{T_B}(t_{k+1})$$

对于此种电流控制方法做了几组模拟，其结果如下：

这是在时间间隔为 0.01s 得到的结果

$$W_z = 50856.5J \quad W_E = 50844.5J \quad \rho = 0.000235958$$

$$W_z = 50801.3\text{J} \quad W_E = 50798.8\text{J} \quad \rho = 0.000245681$$

$$W_z = 50824.3\text{J} \quad W_E = 50811.8\text{J} \quad \rho = 0.000255758$$

这是在时间间隔为 0.1s 得到的结果

$$W_z = 50735.6\text{J} \quad W_E = 50084.8\text{J} \quad \rho = 0.01325$$

$$W_z = 50887\text{J} \quad W_E = 50130.4\text{J} \quad \rho = 0.014878$$

$$W_z = 50824.3\text{J} \quad W_E = 50160.7\text{J} \quad \rho = 0.014500$$

通过对结果的数据统计可以看到灰色预测的方法可以更好的减少制动机能量的误差，比之前控制方法 0.04% 的结果要提高了一半，同样在时间间隔为 0.1s 时灰色预测的方法得到的结果仍然比之前的预测方法要好很多，而结果的稳定性也有所提高。

9 电机控制策略精度和稳定性的检验

通过计算机模拟的方法对电机控制策略进行检验。通过实验结果对电机控制模型的精度和稳定性进行分析，及衡量评价方法的合理性，普遍适用性，在附件中会给出模拟程序和相应的数据。

9.1 计算机模拟

9.1.1 计算机模拟实现方法

计算机模拟的具体实现方法已在前面说明，在求解模型和评价控制方法中我们做了如下的计算机模拟：

1. 模拟出路试情况下制动机扭矩的变化情况。这种模拟是将连续量离散化后得到的，实际上我们得到的只是一些离散时刻的值。
2. 根据模拟出的扭矩数据，计算出路试时车轮仅在制动机作用下速度的变化情况。
3. 根据上面模拟出的制动机扭矩的数据，计算出试验台上在制动机和某种控制策略下电动机产生的扭矩共同作用下主轴转速的变化情况。

9.1.2 计算机模拟的稳定性：

我们通过在 Mathematic 中随机产生多组制动机扭矩的变化记录。

对记录进行最小二乘法的曲线拟合，得到新的曲线函数 $f'(x)$ ，和产生随机数据的模拟函数 $f(x)$ 进行傅里叶分解比较，我们得到统计差异为 0.107%，这种吻合程度是比较好的。

由于数据本身就是在一一定的概率下随即产生的，进行残差分析只是还原了模拟最初采用的数据，这里不做分析。

9.2 电机控制策略精度和稳定性

通过计算机模拟，我们模拟了产生了 80 组制动机制动时扭矩变化的数据。这些数据分为 4 组：

1. 我们将制动机制动时间延长到 4.00s,4.50s,5.00s,5.50s,6.00s.....
2. 我们改变制动的初始速度 50rad/s,52rad/s,54rad/s,56rad/s,60rad/s.....
3. 我们通过添加正太分布的随机因子，每次添加我们都会改变正态分布的均值和均方差{1.502, 5.6843}, {1.402, 5.6843}.....
4. 我们通过添加正弦噪声 $10\sin 0.67x + 9\cos 0.67x, 13\sin 0.60x + 15\cos 0.60x$

在不同的制动机扭矩情况下，我们通过模拟得到制动机路试时能量的变化，和试验台上制动机损耗的能量，通过现有的评价方法我们对模拟后的结果进行评价，计算整体能量误差和累计能量误差。

我们通过数据统计可以得到，试验台上制动机能量损耗和路试时制动机能量损耗的相对能量差不超过 0.05%，由此可以证明电机的控制策略具有很高的精度，在后面的模型扩展中我们会进一步说明为什么会有这么高的精度，这和控制策略中时间步长的长短

是有关系的。

对得到的能量误差进行残差分析和回归分析，我们可以发现在不同的模拟前提下能量误差间的偏差不超过 6.07%，由此可以证明电动机控制策略具有较高的稳定性。

10 模型扩展：

10.1 神经网络的控制策略

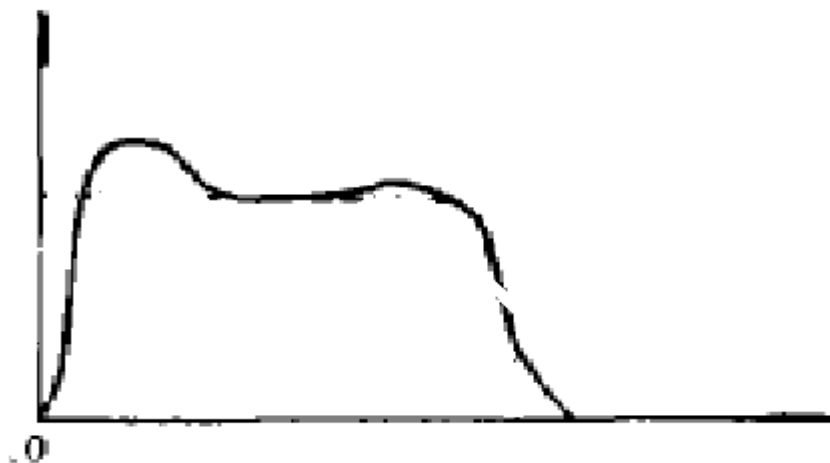
试验台上模拟制动机制动过程本质是一个根据现有信息做出决策的模型。怎样能做出较好的决策使得试验台上主轴的转动变化过程和路试时车轮的转动变化过程始终保持一致，是模型要解决的最终目标。

这里我们提出利用神经网络的感知器来进行下一时间段内决策的制定方法。我们制定一个可以输入多个时间的顺势转速和顺势扭矩的感知器，感知器的输出则是下一时间段内最优的电机扭矩。我们通过计算机模拟产生几组制动机扭矩变化数据和路试时车轮的转速，理论上感知器的学习样本应该是当前主轴转速乘以主轴所具有的机械惯量，但是由于下一时刻制动机的扭矩是未知的，在保持当前电机扭矩的情况下会产生误差，所以没有最优的学习样本，只能通过不断的模拟由同一模拟函数产生制动机扭矩能量误差不断减小时，电机的扭矩样本。

我们利用 Mathlab 中神经网络的工具箱进行了模拟，在有限的样本和学习次数下，得到的控制方法并不是非常的理想，但是通过不断地完善神经网络的学习，是可以得到较好的控制方法，但是这样时间的开销较大。

10.2 更为广泛的使用范围

通过查阅了大量资料，我们得知在工程中，制动机制动过程中扭矩的变化过程近似如下：



这个过程包括了制动机开始制动，到达稳定状态后又撤销制动。

虽然题目(4)中所给的数据只包括了制动机开始制动到达到稳定的状态，但是我们通过计算机模拟分段地模拟了制动机停止制动过程中扭矩的变化，在这种情况下我们计算了制动机能量的误差，和前面得到的结果一致，控制策略可以将累计能量误差控制在 0.05% 以下，表明我们的控制方法在制动机停止阶段也是很有效的。

我们认为当制动机达到稳定状态下，制动的扭矩会夹杂噪声，如题目中给出的数据夹杂的是正弦噪声，不同的噪声是否会影响控制器的稳定性，我们还是通过计算机模拟的方法，在制动机稳定下添加不同的噪声来观测控制策略的稳定性，同样由于累加次数的较少和控制时间间隔较短，制动机的能量误差可以控制在 0.05% 以下。

11 模型评价：

模型的优点是我们在给出较好的控制策略的同时给出了我们认为较为合理的控制评价方法，将连续的制动机扭矩变化过程离散化，是解决控制策略的基础，在模型解答中我们利用了这种离散化的数据，通过动态模拟的方法给出了路试时车辆能量的变化，同样在测试模型稳定性和精确性时我们都利用了这种方法。而且我们在处理模型的结果时利用了大量的模拟数据，我们通过对模拟数据结果的统计分析，可以更好的判断出控制方法的稳定性和精确性。

参考文献

- [1]姜起源等，《数学模型》，北京：高等教育出版社，2004
- [2]马文蔚，周雨青，《物理学教程》，北京：高等教育出版社，2006
- [3]马技杰等，《制动器惯性台架电模拟惯量的研究》，中国技术学报，2008
- [4]莫志勇等，《汽车机械惯量电模拟技术》，中国惯性技术学报，2009
- [5]林荣会等，《双分流加载式制动器试验台》，自动化仪器仪表，1997