



2015 湖南省研究生数学建模竞赛参赛承诺书

我们仔细阅读了湖南省研究生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权湖南省研究生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号是（从组委会提供的试题中选择一项填写）：

我们的参赛报名号为（如果组委会设置报名号的话）：

所属学校（请填写完整的全名）：国防科学技术大学

参赛队员（打印并签名）：

1.许强

2.戴满源

3.刘桃林

指导教师或指导教师组负责人(打印并签名)：

日期： 年 月 日

评阅编号（由组委会评阅前进行编号）：

2015 湖南省研究生数学建模竞赛

编号专用页

评阅编号（由组委会评阅前进行编号）：

评阅记录（可供评阅时使用）：

评阅人										
评分										
备注										

湖南省首届研究生数学建模竞赛

题目： **3D 扫描系统**

摘 要：

3D 扫描仪是通过模拟人类视觉系统获取物体的立体结构信息，计算三维环境中物体的姿态、轮廓等三维几何参数，并据此建立成像模型，达到对物体结构三维重构的仪器。本文主要工作是研制设计 3D 扫描系统。该系统采用两台摄像机对激光光源锁定的旋转盘上的物体进行拍摄，至整个转盘旋转一周为止。获取图像之后，根据几何原理以及成像模型实现物体立体结构的重建。本文的核心工作分为三个部分。

第一部分介绍了自制 3D 扫描系统的实验设备。首先，通过分析人类视觉系统，模仿两只眼睛与人类视觉的立体感知过程，从而构造两个摄像头表征两幅“视网膜”观察同一物体获取视差信息，采用激光模拟瞳孔“聚精会神”获得较为清晰的扫描图像，利用旋转转盘形成“眼部扫描”，获得更加精密的全景图像。之后结合物品的性价比，选择了适合本产品的相关设备：两台摄像机、一个线光源、小木箱、转盘以及定标板。

第二部分探讨了 3D 扫描系统的工作方式和重构算法。首先，介绍了物体成像建模中常采用的四种坐标系（计算机像素坐标系，图像坐标系，摄像机坐标系，自由空间坐标系）之间的相互转换关系，详细分析了摄像机的成像原理及模型，并对摄像机的线性及非线性成像模型进行了研究与探讨，得出结论：3D 空间中物体结构的每一点在计算机图像域中的位置与 3D 空间中物体表面相应点的几何位置有关，而这些坐标点位置之间的对应关系是由摄像机成像模型当中的参数决定的。然后引出了两种情况下摄像机内外参数的表达式，并研究了确定摄像机内外参数的方法。接下来通过测量像素坐标系实际值与其对应的自由空间中的坐标值，代入摄像机模型中初步获得了摄像机的线性结构参数，并根据参数结果通过对非线性成像模型的图像信息进行了校正工作，获得了摄像机的非线性畸变系数。最后，在畸变系数及内外结构参数的基础上，结合 LM 优化算法对摄像机的参数进行进一步优化。实验结果表明，通过本文算法所获得的像素坐标值与实际值误差不超过 1 个像素。因此该优化过程能够取得较好精度的摄像机内、外参数，为后续工作的进行做了充分的准备。为了保证匹配的效率以及正确性，本文利用线激光扫描约束每次匹配的范围，并将两个摄像机极线校准，降低了算法复杂度，并且理论分析了其他可能存在的约束条件。再根据上述约束条件，设定 $a \times a$ 匹配模块，以其中一个摄像机图像面为固定面，另一个摄像机图像面为匹配面，按照相似度函数 SAD 进行遍历。实验结果表明，本文算法速度较快，匹配效率较高，较没有约束的匹配方法正确率提高了约 40%，速度快了近 20 倍。在三维重建中，阐述了基于平行双目与实际双目模型的三维重建的原理，并针对三维结构物体，分别在仿真程序和实际实验中都实现了对物体的三维重建，结果表明，尽管由于匹配窗口和实验误差等因素带来的误差影响，但是实验结果已经能够较好地完成对物体的三维重构。

问题三探讨了本文建立的 3D 扫描系统的参数指标。首先基于两个摄像机像

素点匹配窗口，结合成像模型，在考虑物体离摄像机距离约束的条件下，研究了系统的分辨率。结果表明，系统的分辨率在确定摄像机内外参数的情况下，主要与物体离摄像机的距离以及匹配扫描窗口大小有关，并且与摄像机的距离和匹配窗口的大小均成反比，之后通过实验进行了验证。其次，考虑该 3D 扫描系统扫描物体的体积限制。由于本文采用了激光线扫描结合转盘的方式，消除了对物体长度和宽度的限制。但是，由于镜头角度的限制，对扫描物体的高度有所要求，且结论表明高度的限制主要与摄像头偏转角度、摄像机镜头角度、两个摄像机距离、激光照射宽度以及物体离摄像机的距离有关。最后本文从激光器与转盘结合所需要转动的次数、摄像头的工作帧率、由匹配窗口引起的扫描速度以及计算机对于模型的计算能力等方面讨论了该系统的扫描速度。结果表明该系统的扫描速度主要取决于以下几个因素：1）、激光和转盘所造成的转动扫描时间越长，系统扫描速度越慢；2）、计算机所计算的成像模型和重构模型的运行速度越慢，扫描速度越慢。

关键词：3D 扫描，坐标系，模型重构，参数指标

1. 问题背景

3D 扫描仪用于采集现实物体的形状、外观等数据，在 3D 打印、工业设计、动画制作等方面有广泛的用途。3D 扫描仪有多种类型，其扫描方式、测距原理、重构算法各不相同，分辨率、速度、造价、便携性等方面差异较大。最常见的是非接触主动式扫描仪，其基本原理是先将某种光投射到物体表面，再根据采集到的反射信息重构物体表面三维信息。

商用专业 3D 扫描仪通常需要专用硬件设备，价格较高，能否利用普通投影仪和家用数码相机、摄像机等常见设备（不限于这些设备）构建一个简单的 3D 扫描系统？如果可以，请详细描述该系统的设备构成，工作方式和重构算法，并讨论系统的分辨率、速度、扫描区域的尺寸限制等技术指标。

根据已知内容，需要解决的问题如下：

问题一：选用设备构建 3D 扫描仪系统，并详细描述该系统的设备构成；

问题二：自制 3D 扫描系统的工作方式和重构算法；

问题三：讨论该系统的分辨率、速度、扫描区域的尺寸限制等技术指标。

2. 问题分析

对于问题一的求解是本次建模所有问题的基础，后面的两个问题均建立在 3D 扫描仪系统的设备基础之上的。参考人类视觉系统，对于自制 3D 扫描仪的基本的思路首先采用两个摄像头模拟双眼，根据视差测距量原理，获取目标的立体坐标。不妨假设两个摄像机为同一产品，焦距都为 f ，如果两个相机位于同一个平面上，通常可以采用视差测距量原理，如图所示：

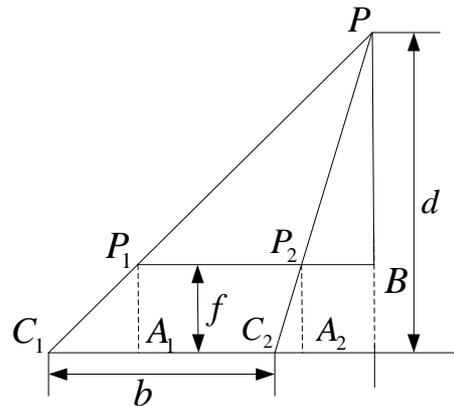


图 1 视差测距量原理

假设图 1 当中所示的坐标点 C_1 、点 C_2 分别为两个摄像机镜头的光学中心位置，两者之间的距离为 b 。那么自由空间中一点 P 的在两个摄像机的图像平面上的投影分别为 P_1 、 P_2 ，其中， P 到 C_1C_2 的距离为 d ， PA_1 ， PA_2 与 PB 垂直于 C_1C_2 图像平面，令 $A_1P_1 = I_a, A_2P_2 = I_b, P_2B = a$ ，则由三角形相似可得：

$$\begin{cases} \frac{d-f}{d} = \frac{a}{a+I_b} \\ \frac{d-f}{d} = \frac{b-I_a+I_b+a}{b+I_b+a} \end{cases} \quad (1)$$

由上式可得 $d = \frac{bf}{I_a - I_b}$ ，其中， $I_a - I_b$ 就是点 P 在两个摄像机之间形成的视差，从数学模型中我们可以得到深度 d 仅仅和 b 、 f 、 $I_a - I_b$ 有关，其中 b 与 f 均为已知，因此得到 d 的值，其关键在于求视差 $I_a - I_b$ 。而当获取 d 值时，即可根据相似三角形求得 P 的坐标。因此，摄像机 1 图像平面上的任意一点，只要能够通过匹配算法，寻找到摄像机 2 的图像平面上与之对应的匹配点，计算两个摄像机之间形成的视差，就可以确定出该点的三维坐标，进而完成物体轮廓的重构计算。之后采用转盘模拟眼球的转动，从而形成扫描机制，遍历整个物体。再结合题目中要求，筛选出题目要求的家用设备。

对于问题二而言，我们需要描述整个系统的工作方式以及原理。首先问题一中提出的理想平行双目视觉模型是不存在的，因为在实际情况当中我们事先是无法得知摄像机光轴位置。因此，我们必须考虑任意放置摄像机的情况，这样原来所分析的视差测距原理就不能适用，必须重新采用新的办法，首先就是要解决摄像机与自由空间之间的对应关系，这之间包含了确定摄像机的位置、内置属性，以及建立成像模型等三个方面。要解决这些问题，首先就必须利用数学知识计算得到摄像机的像素坐标系与自由空间坐标系之间的相互转换公式，从而得到该摄像机所在的计算机像素坐标系与自由空间坐标系之间的对应关系。再者，基于特定的实验条件，经过实际测试，根据上述对应关系，即可以获取摄像机的内置属性和外部参数。之后，对于两个摄像机所存储的图像数据而言，我们需要寻找到两个图像上对应部分的匹配，同时为了保证匹配的效率以及稳定性，我们必须设置相关约束，从而加快匹配速度和鲁棒性。当获取了两个摄像机图像域一一对应的匹配关系之后，结合成像模型公式根据视差关系，即可回复图像的三维信息。具体流程如图 2 所示：

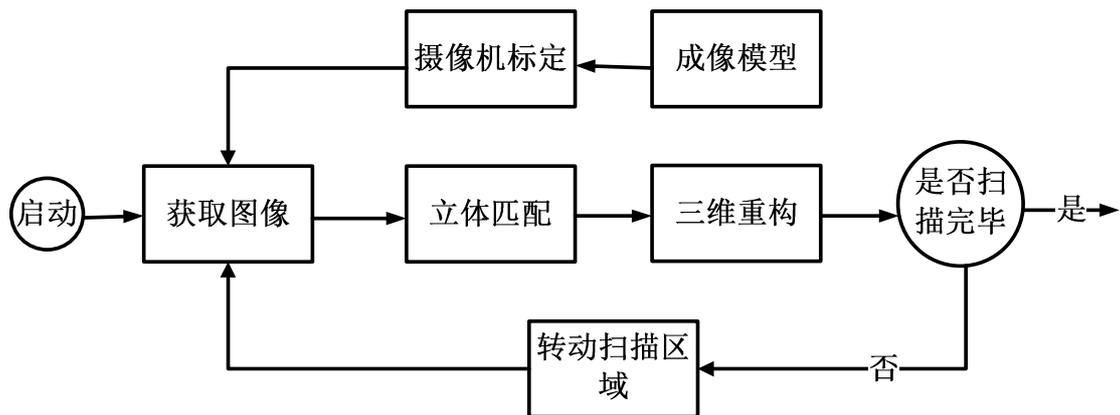


图 2 工作流程图

最后结合理论分析，进行仿真实验和实测实验验证结论。

对于问题三而言，针对 3D 扫描仪系统所建模型，首先在考虑物体离摄像机的距离约束的条件下，从成像模型、坐标转换以及匹配的原理出发对系统的分辨率进行分析，再结合光学传播原理以及激光线扫描特性和旋转转盘分析物体体积

的扫描限制，最后计算重构算法的复杂度，主要分为两大块，一块是根据激光和旋转转盘所造成的转动扫描时间，第二部分是所计算成像模型和重构模型的计算速度，最后把得到的结果进行归纳，从而计算出扫描时间。

3. 模型假设

- 1、摄像机在整个工作过程当中工作稳定
- 2、摄像机每次拍摄前均已聚焦完毕
- 3、整个 3D 扫描模型光照情况可以控制
- 4、忽略噪声、阴影、透视效果等因素的影响
- 5、忽略控制误差和系统误差
- 6、同一产品摄像机性能完全一样
- 7、忽略数据传输时间、摄像机拍摄时间等

4. 符号说明

符号	符号说明
uO_0v	计算机像素坐标系
xO_1y	图像坐标系
$X_c O_c Y_c$	摄像机坐标系
$O_w X_w Y_w Z_w$	自由空间坐标系
$dx, dy,$	像素坐标系和图像坐标系对应尺寸
(u_0, v_0)	图像坐标系原点 O_1 在计算机像素坐标系中的坐标
λ	倾斜角
f	摄像机焦距
O_c	摄像机的光心

P_T	任意一点
O_t	摄像机光心 O_c 与 P_T 的连线与图像平面的交点
(x_p, y_p)	O_t 在图像平面的坐标
(X_{cp}, Y_{cp}, Z_{cp})	O_t 在摄像机平面的坐标
(X_w, Y_w, Z_w)	任意点 P 在自由空间坐标系下的坐标
δ_x, δ_y	畸变修正量
k_1, k_2	畸变系数
(x, y)	理想线性摄像机模型中图像坐标系上 P 点像点坐标
(x', y')	实际场景中获取的 P 点像点坐标
(x_p, y_p)	精确的像主点坐标
\mathbf{R}	旋转矩阵
\mathbf{r}_i	\mathbf{R} 第 i 列向量
\mathbf{t}	平移向量
\mathbf{M}_1	摄像机内部参数矩阵
\mathbf{M}_2	摄像机外部参数矩阵
\mathbf{H}	单位矩阵
m_j	每幅图像获取的控制点个数

\mathbf{k}_c	畸变系数矩阵
$\check{m}(\mathbf{M}_1, \mathbf{k}_c, \mathbf{M}_2)$	点 M_j 在第 i 幅图像上的投影
W_1, W_2	立体空间中任意一点 W 在两个摄像机像面中的投影点
c_1, c_2	两个摄像机的中心
e_1, e_2	两个摄像机的极点
π	极平面
l_1, l_2	π 和两个摄像机成像平面的交线
W'	π 上的一点
W_1', W_2'	W' 在两个摄像机平面上的投影
$\mathbf{P}_{1N}, \mathbf{P}_{2N}$	新的参数矩阵
\mathbf{R}_N	新的透视矩阵的旋转矩阵
a	固定搜索窗口的尺寸
SAD	像素灰度差的绝对值和
C_1, C_2	两个摄像机
$\mathbf{M}_{c1}, \mathbf{M}_{c2}$	C_1, C_2 的自由空间与计算机像素坐标转换的矩阵
R_z	转盘直径
θ	镜头角度

l_j	两个摄像机光心离物体的最近处距离
φ	摄像机的偏转角度
d_c	两个摄像机光心距离
d_x	激光照射宽度
H_l	被扫描物体的高度
L_l	被扫描物体的长度
W_l	被扫描物体的宽度
ϕ	照射角度
u_l, v_l	每帧计算机扫描图像的长度和宽度

5. 模型的建立与求解

5.1 自制 3D 扫描系统的设备构成

根据文章中三维扫描的要求,联想到自然界中高等生物大多通过眼睛去获取空间立体感,如今我们采用两个摄像机模拟出瞳孔的作用,从两个不同的观察位置观察同一物体,来获取其不同视角下的二维图像,之后采用特征点匹配的方法联合两幅二维图像中像素点,通过三角测量原理计算出图像像素之间的位置偏差,即视差,从而获取物体的三维信息。同时为了完成自由空间平面与摄像机平面之间相互转换问题,在物体背后设定定标板,确定扫描系统的相关参数。再者,为了保证两个摄像机照射的公共区域能够理想化确定,假定整个场景处于暗室环境,并且用线激光器照射物体上确定每次两个摄像机公共区域交叉范围,以提供给计算机进行处理,最后在物体下方安装转盘,待该帧数据处理完毕之后,旋转转盘,形成新的激光照射区域,至整个模型扫描完毕,具体整个设备设置如图所示。

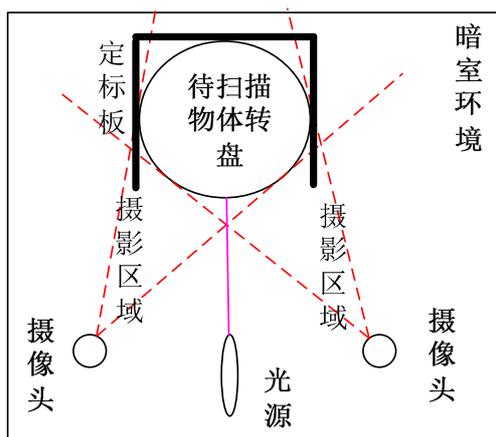


图 3 设计草图

其中，所用设备如下表所示：

名称	数量(份)	备注	价格(元)
摄像头	2	像素 500 万，照射角度为 90 度	100
激光器	1	光源同样可以采用投影仪，灯泡等	30
转盘	1	能够缓慢旋转，并带有刻度	20
定标板	3	普通木板加定标纸	1
暗室小木箱	1	不透明箱子	20
处理器	1	这里采用笔记本电脑处理，有条件可以采用 FPGA 或者 RAM	无
总计			171

表 1 设备列表

其中，表中所列产品价格来自于淘宝网。并且所用设备并不是唯一确定，相关功能一样的都可以被代替，如摄像头可以用照相机代替，激光器可以用线白炽灯或者含有条形灯光的投影仪代替等等。

5.2 自制 3D 扫描仪系统的工作方式及重构算法

5.2.1 坐标系的转换

在本模型当中，需要利用摄像机捕获的自由空间中的二维图像信息来计算物体在三维空间中的几何信息。因此首先需要将实际自由空间当中的坐标维度与摄像机空间维度、图像空间维度以及计算机像素域之间进行转换，为了方便描述问题，先定义以下四个坐标系：计算机像素坐标系，图像坐标系，摄像机坐标系，自由空间坐标系。

➤ 计算机像素坐标系

计算机像素坐标系是为了在计算机中存储图像而建立的像素坐标系，是其他所有坐标系的基础，因此该坐标系当中每个元素的实质为像素，其值为像点的灰度，在此用 uO_0v 坐标系来表示。

➤ 图像坐标系

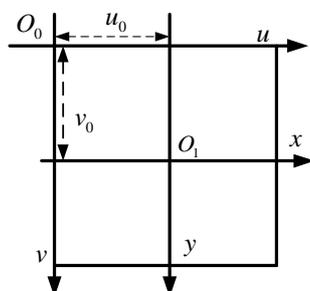


图 4 计算机像素坐标系与图像坐标系之间的关系

摄像机的图像坐标系与计算机像素坐标系是处于同一个平面上，但二者的原点不同，如图（4）所示， xO_1y 为图像坐标系，不失一般性，可以假定图像坐标系的坐标原点 O_1 位于计算机像素坐标系 (u_0, v_0) 位置上。除此之外，两者的单位也不同，计算机像素坐标系的单位是像素，但是图像坐标系的单位是毫米。则两坐标系存在以下的数学关系：

$$\begin{cases} u = \frac{x}{dx} + u_0 \\ v = \frac{y}{dy} + v_0 \end{cases} \quad (2)$$

其中， dx ， dy 表示每一个像素在其坐标轴上对应的物理尺寸。然而在现实当中，摄像机面阵的其中一条坐标轴，（一般认为是 y 轴），其相邻两列间的感光元件的距离是由硬件制造商给出的，我们认为它是固定不动的。而 x 轴受到采集时钟不同步，数模转换导致的量化误差等因素影响，导致其数据具有不确定性，这样也就导致图像传感器的两条感光坐标轴没有构成直角。通常采用添加倾斜角 λ 来描绘这个问题。那么上式变为：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{dx} & \lambda & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

➤ 摄像机坐标系

(1) 线性摄像机模型

摄像机模型是对光学成像过程当中几何关系的简化，是自由空间中物点与摄像机获取的二维图像中像点之间约束关系的数学描述。首先，为了简化模型，认

为摄像机是理想的成像模型，即是光学中的中心投影，通常也称为针孔模型。如图 5 所示，我们沿着摄像机光轴把图像坐标系 xO_1y 移到摄像机的光心 O_c 处建立摄像机坐标系 $x_cO_cy_c$ ，并将摄像机光轴作为 z_c 轴。这样我们可以通过求解摄像机光轴 z_c 和图像坐标系 uO_1v 的交点与摄像机光心之间的距离 O_cO_z ，即得到了该摄像机的焦距 f 。

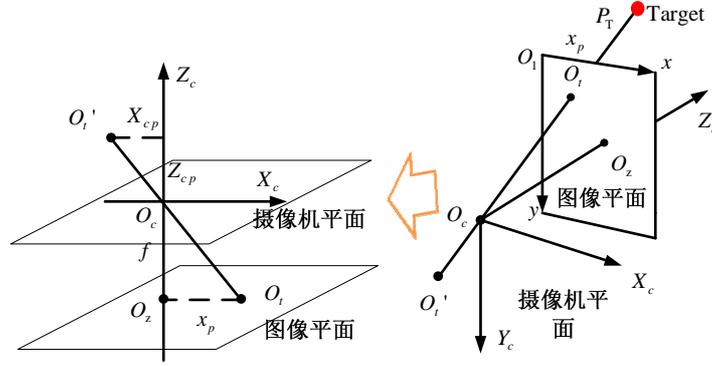


图 5 针孔摄像机模型示意图

由针孔模型可知，任意一点 P_T 在图像平面 xO_1y 上的投影点，是摄像机光心 O_c 与 P_T 的连线 O_cP_T 与图像平面的交点 O_i 。假定 O_i 的在图像平面的坐标为 (x_p, y_p, z_c) ，在摄像机平面的坐标为 (x_{cp}, y_{cp}, z_{cp}) ，假设光从远处照射过来，根据针孔照相机模型，由三角形相似原理，此可以得到：

$$\begin{cases} x_p = f \frac{X_{cp}}{Z_{cp}} \\ y_p = f \frac{Y_{cp}}{Z_{cp}} \end{cases} \quad (4)$$

由此得到了两个坐标系之间的变换关系，为了方便之后的计算，可以将摄像机坐标系到图像坐标系的变换改写为矩阵形式：

$$Z_c \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} \quad (5)$$

(2) 非线性摄像头

然而在实际应用当中，摄像机的镜头都是会产生一定程度上的畸变，而且这种畸变是摄像机镜头的本质特性，不能根除。因此继续采用线性模型分析的方法便会对摄像机的标定精度产生不良影响，基于此开展非线性的摄像机模型研究会对此种偏差进行一定的修正。在理想模型中，我们得到了图像坐标系中 P 点坐标为 (x, y) 。然而实际场景中获取的 P 点的像点坐标有所偏移，不妨假设在非线性

情况下，其真实坐标为 (x', y') 。那么非线性摄像机模型的研究价值就在于寻找点 (x, y) 与点 (x', y') 之间的关系。现做如下假设，两个坐标之间满足：

$$\begin{cases} x = x' + \delta_x \\ y = y' + \delta_y \end{cases} \quad (6)$$

在式中， δ_x 、 δ_y 是畸变的修正量，它们的值和在图像平面上所处的位置有关，离光心越远则畸变所需的修正量就越大。在理论上，镜头的畸变只产生于径向和切向两个方向上。但很多参考文献都进行了实验，并且表明切向上的畸变往往是可以忽略的，因此只考虑径向上的畸变^[1]。径向畸变的修正量可以用公式计算：

$$\begin{cases} \delta_x = (x' - x_p)(k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots) \\ \delta_y = (y' - y_p)(k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots) \end{cases} \quad (7)$$

式中 (x_p, y_p) 为精确的像主点坐标， $r^2 = (x' - x_p)^2 + (y' - y_p)^2$

➤ 自由空间坐标系

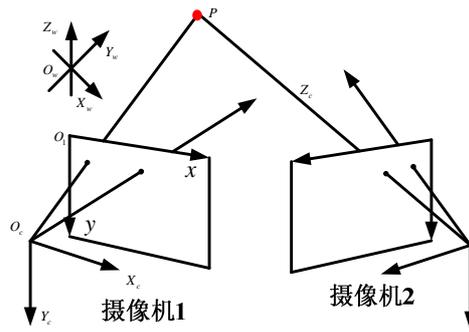


图 6 自由空间坐标系

当采用多个摄像机观察目标点 P 的时候，就需要了解这些摄像机坐标系相互之间的关系，以及场景中的各个仪器位置统一关系等等。此时，可以采用自由空间坐标系 $O_w X_w Y_w Z_w$ 作为基准坐标系来描述整个场景，如图6所示。由于摄像机的坐标系与自由空间的坐标系同样都是三维直角坐标系，那么可以利用旋转矩阵 \mathbf{R} 和平移向量 \mathbf{t} 来描述世界坐标系与摄像机坐标系的关系。不妨假设空间物体轮廓当中任意一点 P 在自由空间坐标系下的坐标为 (X_w, Y_w, Z_w) ，在摄像机坐标系下的坐标为 (X_c, Y_c, Z_c) ，则存在以下的关系：

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} + \mathbf{t} = [\mathbf{R} \quad \mathbf{t}] \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

将式(8)代入式(5)和式(3)中可以得到点的自由空间坐标系的坐标与其投影点 P 的计算机图像坐标 uO_0v 的变换关系, 如式(9)所示:

$$Z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{dx} & \lambda & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{R} \quad \mathbf{t}] \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{dx} & \lambda & u_0 \\ 0 & \frac{f}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{R} \quad \mathbf{t}] \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \bar{\mathbf{X}} \quad (9)$$

根据上述理论, 我们设定摄像机的内外参数, 用采用仿真程序实现坐标系的转换, 效果图如图所示, 仿真设定参数见附录:

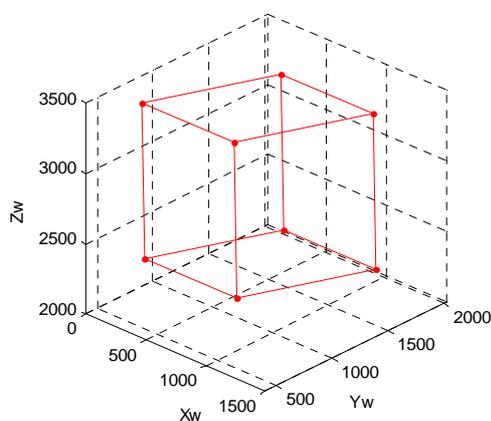
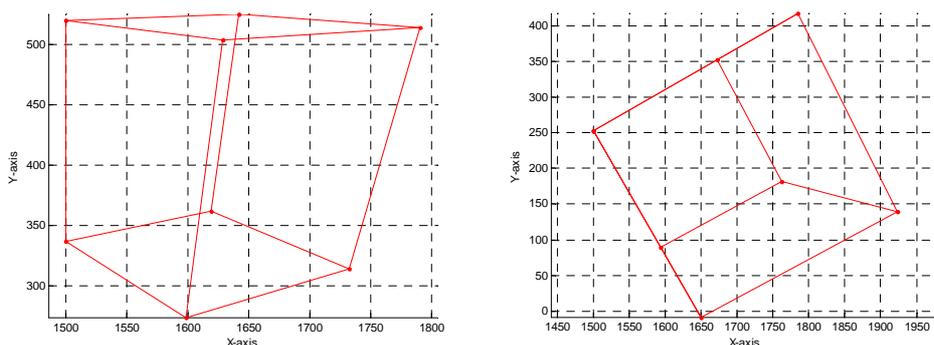


图 7 自由坐标系物体的三维机构



(a) 左摄像机拍摄图像

(b) 右摄像机拍摄图像

图 8 左右摄像机拍摄的计算机像素点坐标系

此计算结果与效果图表明, 经过摄像拍摄之后的数据与原本的三维数据有很大的差异, 很难直接从上面恢复出三维图像。因此, 要解决二者之间的对应关系, 首先必须获取 $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ 两个矩阵的具体结果。

5.2.2 摄像机的参数求解

要获得两个坐标系之间的对应关系，首先必须得知 $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ 两个矩阵的实际

值。由公式(9)可知 \mathbf{M}_1 由 $\frac{f}{dx}$, $\frac{f}{dy}$, u_0 , v_0 , λ 等五个因素决定，而这五个因

素只与摄像机本身内部结构和本质属性有关，所以称为摄像机内部参数；则 \mathbf{M}_2 完全是由摄像机与世界坐标系的位置决定，所以称为摄像机外部参数。因此，此时需要对摄像机内、外参数确定，之后才能根据成像模型完成三维物体结构的重现。为了方便计算，将自由空间坐标系下的 $Z_w = 0$ 平面设为基准平面。用 r_i 表示 \mathbf{R} 第 i 列向量。则对于基准平面上的点有：

$$z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{dx} & \lambda & u_0 \\ 0 & \frac{f}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3 \ \mathbf{t}] \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{t}] \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

然后，将基准平面上的点与其像点之间建立起映射关系： $\mathbf{H} = \mathbf{M}_1 [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{t}]$,

\mathbf{H} 是单位性矩阵。设 $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$ ，则可得：

$$\begin{cases} Z_c u = h_{11} X_w + h_{12} Y_w + h_{13} \\ Z_c v = h_{21} X_w + h_{22} Y_w + h_{23} \\ Z_c = h_{31} X_w + h_{32} Y_w + 1 \end{cases} \quad (11)$$

整理上述式子，可得：

$$\begin{bmatrix} X_w & Y_w & 1 & 0 & 0 & 0 & -uX_w & -uY_w \\ 0 & 0 & 0 & X_w & Y_w & 1 & -vX_w & -vY_w \end{bmatrix} \mathbf{H}' = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{H}' = [h_{11} \ h_{12} \ h_{13} \ h_{21} \ h_{22} \ h_{23} \ h_{31} \ h_{32}]^T$ ，令 $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \mathbf{h}_3]$ ，则

$$[\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \mathbf{h}_3] = \lambda \mathbf{M}_1 [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{t}] \quad (13)$$

由上式可得：

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \frac{1}{\lambda} \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{r}_2 = \frac{1}{\lambda} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{h}_2 \end{cases} \quad (14)$$

这样根据旋转矩阵具体属性，有 $\mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_2 = 1$ ，且 $\mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2 = 0$ ，每幅图像可以获得两个摄像机内参数矩阵以及外参数矩阵的相关基本约束，如下式所示：

$$\begin{cases} \mathbf{h}_1^T \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{h}_2 = 0 \\ \mathbf{h}_1^T \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^T \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{h}_2 \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{令 } \mathbf{B} = \mathbf{M}_1^{-T} \mathbf{M}_1^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}, \text{ 则参数求解:}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{(dx)^2}{f^2} & -\frac{\lambda f^3}{(dx)^2 dy} & \frac{f^2 (\lambda v_0 f - u_0 dy)}{(dx)^2 dy} \\ -\frac{\lambda f^3}{(dx)^2 dy} & \frac{f^2 (\lambda^2 f^2 + (dx)^2)}{(dx)^2 (dy)^2} & \frac{f^2 (f^2 \lambda^2 v_0 - f \lambda u_0 dy - v_0 (dx)^2)}{(dx)^2 (dy)^2} \\ \frac{f^2 (\lambda v_0 f - u_0 dy)}{(dx)^2 dy} & \frac{f^2 (f^2 \lambda^2 v_0 - f \lambda u_0 dy - v_0 (dx)^2)}{(dx)^2 (dy)^2} & \frac{f^4 (\lambda v_0 dy - u_0 f)^2}{(dx)^2 (dy)^4} + \frac{f^2 v_0^2}{(dy)^2} + 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

由上式得 \mathbf{B} 为对称矩阵，定义 6 维向量 $\mathbf{B}' = [B_{11} \ B_{12} \ B_{22} \ B_{13} \ B_{23} \ B_{33}]^T$ ，则有：

$$\mathbf{v}_{ij}^T \mathbf{B}' = \mathbf{h}_i^T \mathbf{B} \mathbf{h}_j \quad (17)$$

其中，

$$\begin{cases} \mathbf{h}_i = [h_{i1} \ h_{i2} \ h_{i3}]^T \\ \mathbf{v}_{ij} = [h_{i1} h_{j1} \ h_{i1} h_{j2} + h_{i2} h_{j2} \ h_{i2} h_{j2} \ h_{i3} h_{j1} + h_{i1} h_{j3} \ h_{i3} h_{j2} + h_{i2} h_{j3} \ h_{i3} h_{j3}]^T \end{cases} \quad (18)$$

根据上述式子(18)可得到两个关于 \mathbf{B}' 的方程：

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{12}^T \mathbf{B}' = 0 \\ (\mathbf{v}_{11} - \mathbf{v}_{22})^T \mathbf{B}' = 0 \end{cases} \quad (19)$$

假设有平面模板图像 n 幅，根据上式可得线性方程组为：

$$\mathbf{V} \mathbf{B}' = 0 \quad (20)$$

其中， \mathbf{V} 是一个 $2n \times 6$ 的矩阵。当 $n \geq 3$ 时，可得到至少 6 个方程式，从而求解出 \mathbf{B}' ；当 $n = 2$ 时，即未知数大于方程个数，因一般使用的大多为方形，则可将 \mathbf{M}_1 的两坐标轴的夹角设为 90 度，即倾斜因子 $\lambda = 0$ ，则 $[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{B}' = 0$ ，这样就多了一个约束条件；当 $n = 1$ ，则需要进一步将定光心投影在图像的中心，才可求出解。求得 \mathbf{B}' 即可以得到矩阵 \mathbf{B} 。从而可以求得摄像机的所有内部参数。假设 $\mu = \frac{1}{Z_c}$ 为一个任意的尺度系数，得到了：

$$\begin{cases} v_0 = (B_{12} B_{13} - B_{11} B_{23}) / (B_{11} B_{22} - B_{12}^2) \\ u_0 = \lambda v_0 / \frac{f}{dx} - B_{13} f_{13}^2 / \mu \\ \mu = B_{33} - [B_{13}^2 + c_y (B_{12} B_{13} - B_{11} B_{23})] / B_{11} \\ \frac{f}{dx} = \sqrt{\mu / B_{11}} \\ \frac{f}{dy} = \sqrt{\mu B_{11} / (B_{11} B_{22} - B_{12}^2)} \\ \lambda = -B_{12} \left(\frac{f}{dx}\right)^2 \frac{f}{dx} / \mu \end{cases} \quad (21)$$

利用内参数 \mathbf{M}_1 和单位矩阵 \mathbf{H} ，对每个不同时点的摄像机外参数可以按如下公式求得：

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \lambda \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{r}_2 = \lambda \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{t} = \lambda \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{h}_3 \\ \lambda = 1 / \|\mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{h}_1\| = 1 / \|\mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{h}_2\| \end{cases} \quad (22)$$

至此，根据公式 (21) 以及公式 (22)，即可以完成对摄像机的内外参数的求解。再者，在获得摄像机的内外参数的求解基础上，可以转换求出图像的理想点坐标 (x_p, y_p) ，在这个基础上，结合原始数据便可求出畸变系数。其中畸变模型为：

$$\begin{cases} x = x' + (x' - x_p)(k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots) \\ y = y' + (y' - y_p)(k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots) \end{cases} \quad (23)$$

即：

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中：

$$\begin{cases} A_1 = (x' - x_p)(X_n^2 + Y_n^2) \\ A_2 = (y' - y_p)(X_n^2 + Y_n^2) \\ B_1 = (x' - x_p)(X_n^2 + Y_n^2)^2 \\ B_2 = (y' - y_p)(X_n^2 + Y_n^2)^2 \end{cases} \quad (25)$$

显然，首先根据式子（22）计算出图像中的实际坐标与理想坐标的差值，然后解方程组便可。从而解出畸变系数 k_1 ， k_2 。

假设已经给定了标定板，那么对于此类非线性最小二乘优化问题可描述为：

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_j} \left\{ \left\| m_{ij} - \tilde{m}(A, k_c, R_i, T_i, M_j) \right\|^2 + (f_y - \tau_{xy} f_x)^2 \right\} \quad (26)$$

其中 n 为图像数量， m_j 表示每幅图像获取的控制点个数， $\tilde{m}(\mathbf{M}_1, \mathbf{k}_c, \mathbf{M}_2)$ 是点 M_j 在第 i 幅图像上的投影， $m_{ij} = (u_{ij}, v_{ij})^T$ 为实际的图像坐标。待优化的可变参数有：内参数矩阵 \mathbf{M}_1 ，畸变系数矩阵 $\mathbf{k}_c = [k_1, k_2]^T$ ，第 i 幅图像的外参数矩阵 \mathbf{M}_2 。对于此非线性最小二乘优化问题，可以建立带约束的 Levenberg – Marquardt 算法进行优化，至此在摄像机内外参数求解的过程完全结束。依据同样原理，现在对另一个摄像机的具体参数进行求解。由于该算法比较成熟，这里不做讨论，关于详细求解过程见附录。

现采用如图所示的标定板，实验使用的摄像机为 TCL S720 手机两台，具体实验场景如图所示：



图 9 实测场景图



(a)



(b)

图 10 左右摄像机拍摄照片

根据上述模型公式，计算结果如下：

➤ 左边摄像头：

$$\frac{f}{dx} = 1670.861, \quad \frac{f}{dy} = 1675.585, \quad \lambda = -2.893, \quad u_0 = 645.865, \quad v_0 = 504.201,$$

$$k_1 = -1.322 \times 10^{-9}, \quad k_2 = 2.216 \times 10^{-9},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.1357 & 0.9866 & 0.0908 \\ 0.5633 & -0.0014 & -0.8263 \\ -0.8150 & 0.1633 & -0.5559 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} -137.528 \\ 13.8004 \\ 589.8032 \end{bmatrix}$$

➤ 右边摄像头：

$$\frac{f}{dx} = 1673.265, \quad \frac{f}{dy} = 1678.268, \quad \lambda = -1.485, \quad u_0 = 576.480, \quad v_0 = 542.534,$$

$$k_1 = -2.0813 \times 10^{-9}, \quad k_2 = 1.1716 \times 10^{-9},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -0.1543 & 0.9791 & -0.1293 \\ 0.5732 & -0.0170 & -0.8163 \\ -0.8021 & -0.2004 & -0.5632 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} -127.0538 \\ 11.8614 \\ 622.4132 \end{bmatrix}$$

用以上得到的标定结果，分别针对标定板上的 11 个点，对比计算值与实际值，得到的重新投影误差图如图所示：

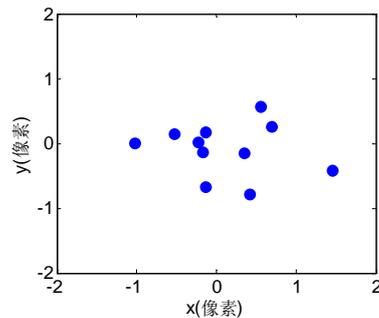


图 11 重新投影误差结果

由图中可以看出其在两条轴方向上的误差基本不超过 1 像素，则可以认定摄像机内外参数的结果的准确性和精度性。为后面的立体匹配和三维重建工作打下了良好的基础。

5.2.3 两个摄像机像素点匹配

前文当中，两个摄像机分别获得了内外参数的计算，现我们可以利用空间同一点在两个摄像机成像平面上的视差大小计算空间点的三维坐标。而要完成空间坐标的测量，首先必须明确空间点在两个像面上像点的坐标，这两个像点称为匹配像点。所以立体匹配的本质就是，给定一幅图像中的一点，寻找另一幅图像中的对应点，使得此两点为空间同一物体点的投影。一方面为了缩小搜索范围提高扫描效率，另一方面为了有效提高扫描的正确率，我们需要确定相关约束。

1)、采用线光源约束每次处理范围

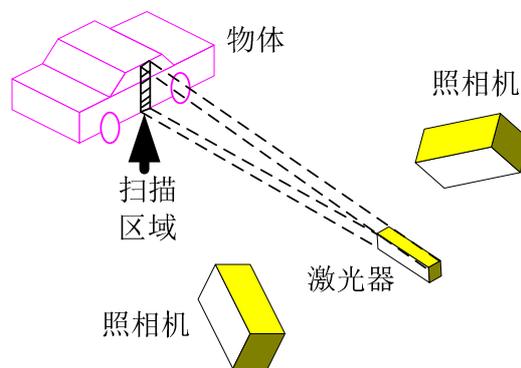


图 12 线光源约束原理

实际当中，如果两个摄像机从左右分别获取图像，由于实际摆放位置的不确定性，很难获取两个摄像机的公共区域部分，因此，我们可以采用线光源和黑暗场景约束每次摄像机拍摄的公共部分，达到每次拍摄没有漏检和虚警。我们假定整个扫描场景处于黑暗当中，每次线激光照射在物体之上，只存在如图所示的阴影部分被相机所拍摄到，那么，每次需要处理的仅仅是阴影部分。其次，可以旋转通过物体下方的带有刻度尺的圆盘，完成对整个物体轮廓结构的扫描。

2)、采用极线约束每次匹配搜索范围

如图所示，自由空间坐标系中物体轮廓上某点 W ，在两个摄像机的像面中的投影点为 W_1, W_2 。假定两台摄像机坐标系的原点分别为 c_1 和 c_2 ，即摄像机镜头中心。而在极线几何中，基线就是 c_1c_2 所处的直线。那么极点就是 c_1c_2 和两台摄像机成像面的交点 e_1 和 e_2 。此外，极平面 π 就是 W, c_1 和 c_2 组成的平面，极线 l_1, l_2 就是 π 与两个摄像机成像平面的交线， l_1 为点 W_2 对应的极线， l_2 对应 W_1 ， l_1 和 l_2 互为对应极线。在 π 上另取的一点 W' ，从图中可以看到，其投影分别为 W_1 和 W_2' ，其中 W_2 和 W_2' 都在极线 l_2 上，这就是所谓的极线约束。因此通过采用外极线约束的方法，可以使立体匹配的遍历范围从平面降为了直线，从而大大地降低扫描范围。

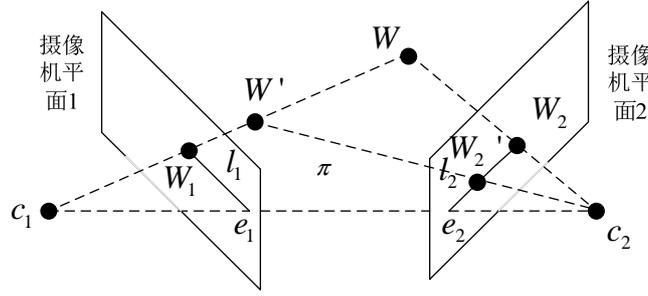


图 13 极线约束原理

但在实际环境下, 摄像机摆放位置总会带来误差。即使是平行垂直投影方式, 也不能确定外极线处于水平状态。这样便大大增加了计算复杂度, 从而造成立体匹配视差搜索复杂化。由于外极线与图像的扫描线并不重合, 而是横跨图像的不同行列。立体图像外极线校准过程的本质是通过原摄像机的透视矩阵经过一定的几何变换得到新的透视矩阵的过程。变换后立体图像的外极线平行于水平线, 即极线共线。

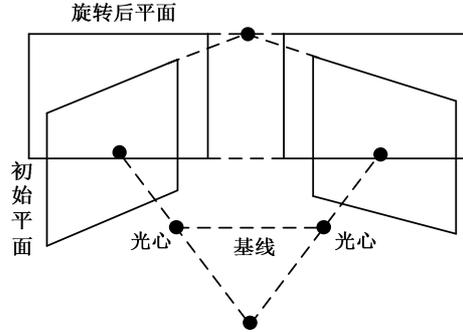


图 14 立体图像对外极线校准示意图

如图 14 所示, 不妨假设摄像机平面绕光心旋转, 直到旋转到两个摄像机的焦平面共面时中止。由此得到的新的参数矩阵为 $\mathbf{P}_{1N}, \mathbf{P}_{2N}$ 。此时基线处于共面的焦平面内, 所有外极线相互平行。为进一步使所有外极线水平, 在焦平面内设置一条与基线平行的 X 轴, 这将使自由三维空间中物体轮廓上面的任意一点在两个摄像机图像内的投影点具有相同的纵坐标。于是, 如果两台摄像机有相同的内部参数, 即它们的焦距相等, 因此它们的图像平面可认为是共面的。而且除了它们的光心在 X 轴的距离不同之外, 它们应具有相同的旋转矩阵。若设两个新的透视矩阵为:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{1N} = \mathbf{M}_{11N} \mathbf{M}_{12N} = \mathbf{M}_{11N} [\mathbf{R}_{1N} & \mathbf{t}_{1N}] \\ \mathbf{P}_{2N} = \mathbf{M}_{21N} \mathbf{M}_{22N} = \mathbf{M}_{21N} [\mathbf{R}_{2N} & \mathbf{t}_{2N}] \end{cases} \quad (27)$$

进一步为了, 可以分解为:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{1N} = \mathbf{M}_{1N} [\mathbf{R}_N & -\mathbf{R}_N \mathbf{c}_1] \\ \mathbf{P}_{2N} = \mathbf{M}_{1N} [\mathbf{R}_N & -\mathbf{R}_N \mathbf{c}_2] \end{cases} \quad (28)$$

对于内参矩阵 \mathbf{M}_{1N} 我们可以取两个摄像机的内参的平均值, 而原摄像机的内部参数已经通过前面的标定过程获得了。前文中通过摄像机绕着光心旋转进行校准, 那么光心位置不变, 因此由上述两式可知, 只要求出两个摄像机的光心 c_1, c_2 以及 A, R 即可求得新的内外参数矩阵。

➤ 新的透视矩阵的光心位置

由于配准是将两个摄像机绕着各自的光心旋转进行的，配准后生成的两个新的摄像机和各自原摄像机应具有相同的关心位置，因此求取摄像机的光心位置即为求原摄像机的光心位置。假定其中一个摄像机光心 C_1 在原摄像机坐标系坐标 $(0, 0, 0)$ 则在原世界坐标系坐标求解转为下式：

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & T_1 \\ r_4 & r_5 & r_6 & T_2 \\ r_7 & r_8 & r_9 & T_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{c1w} \\ Y_{c1w} \\ Z_{c1w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

即求解：

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{c1w} \\ Y_{c1w} \\ Z_{c1w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_1 \\ -T_2 \\ -T_3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

经 Matlab 编程求解可得：

$$\begin{cases} X_{c1w} = \frac{T_3 r_2 r_6 + T_2 r_3 r_8 + T_1 r_5 r_9 - T_3 r_3 r_5 - T_2 r_2 r_9 - T_1 r_6 r_8}{r_1 r_5 r_9 + r_2 r_6 r_7 + r_3 r_4 r_8 - r_1 r_6 r_8 - r_2 r_4 r_9 - r_3 r_5 r_7} \\ Y_{c1w} = \frac{T_3 r_3 r_4 + T_2 r_1 r_9 + T_1 r_6 r_7 - T_3 r_1 r_6 - T_2 r_3 r_7 - T_1 r_4 r_9}{r_1 r_5 r_9 + r_2 r_6 r_7 + r_3 r_4 r_8 - r_1 r_6 r_8 - r_2 r_4 r_9 - r_3 r_5 r_7} \\ Z_{c1w} = \frac{T_3 r_1 r_5 + T_2 r_2 r_7 + T_1 r_4 r_8 - T_3 r_2 r_4 - T_2 r_1 r_8 - T_1 r_5 r_7}{r_1 r_5 r_9 + r_2 r_6 r_7 + r_3 r_4 r_8 - r_1 r_6 r_8 - r_2 r_4 r_9 - r_3 r_5 r_7} \end{cases} \quad (31)$$

即得到了光心位置 $(X_{c1w}, Y_{c1w}, Z_{c1w})$ 。

➤ 新的透视矩阵的旋转矩阵 \mathbf{R}_N

设旋转矩阵为：

$$\mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \mathbf{r}_3^T \end{bmatrix} \quad (32)$$

上式中， \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 和 \mathbf{r}_3 分别平行于自由空间坐标系三条坐标轴轴，可通过下述方法求得：

(a)、基线平行于新 X 轴，因此可取 $\mathbf{r}_1 = \frac{(c_1 - c_2)}{\|c_1 - c_2\|}$ ；

(b)、由于新 Y 轴垂直于新 X 轴以及原 Z 轴，因此， $\mathbf{r}_2 = \mathbf{k} \wedge \mathbf{r}_1$ ，其中 \mathbf{k} 是原 Z 轴的方向矢量，“ \wedge ”表示矢量积；

(c)、又新 Z 轴垂直于新 X 轴与新 Y 轴，故 $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2$ 。

知 c_1 和 \mathbf{R} 后，便可得知摄像机平面内与三维空间物体轮廓对应关系，至此图像的极线校准工作就完成了。

3)、采用唯一性约束减小匹配范围

由于物体表面的点有且只有一个位置，因此摄像机图像中每个像素只有一个匹配值。

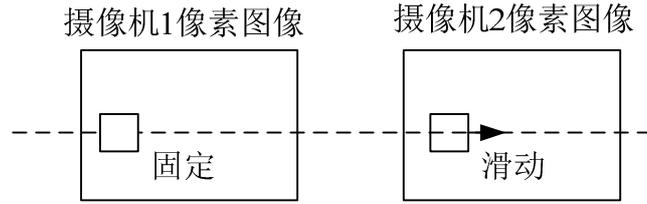


图 15 匹配示意图

现假定输入图像中待处理的部分像素大小为 $N \times M$ ，左侧摄像机 1 的图像为 $f_l(i, j)$ ，右侧摄像机 2 的图像为 $f_r(i, j)$ ， $1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N$ 。

其中出现的标记如下，其中 i 表示行指标， j 表示列指标，下标 l, r 分别代表两个摄像机。假定从摄像机 1 的图像的当前像素 $P_{il} = f_l(i, j_l)$ 开始，那么，现在的问题转化为在右图像的第 i 行上，也就是极线约束所在行，寻找与左图像上的当前像素 $P_{il} = f_l(i, j_l)$ 最相似的对应点。具体步骤如下：

步骤 1：固定搜索窗口尺寸 $a \times a$ ，固定当前像素 P_{il} ，并让同一尺寸的窗口顺序滑过右图像的第 i 行，在每一个像素位置，计算相似度函数，直到在右图像上找到最相似的像点 P_{ir} 为止。其中，相似度函数采用像素灰度差的绝对值和[44]，简称 SAD，具体式子如下：

$$SAD(m, n) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |f_c(i, j) - f_r(i+m, j+n)| \quad (33)$$

上述式子中， $f_c(i, j)$ 和 $f_r(i, j)$ 分别表示当前块和参考块的像素， (i, j) 表示像素坐标，匹配块的大小是 $N \times N$ ， (m, n) 表示参考块相对当前块的位移，使 $SAD(m, n)$ 最小，就是最佳运动向量。

步骤 2：一旦寻找到匹配关系点，根据第三条约束，该点以后将不能和左图像上任何别的像素点相匹配。

步骤 3：列终止检查。当摄像机 1 当前列搜索完毕之后，转换到 $j_l = j_l + w$ 列继续搜索。

步骤 4：终止检查。当所有像素点处理完毕之后，停止处理，并转动物体，获取照片，开始新的匹配。

为了对比匹配提高的性能，针对下图分别按照全图像遍历匹配以及本文所约束的方法进行匹配，实验结果如下：

	运行时间 (ms)	匹配成功率
全图像遍历	632588	53.242%
本文提倡算法	31570	71.324%

表 2 两种匹配方法的对比

5.2.4 三维重构成像

前文中，已经对两个摄像机 c_1 和 c_2 进行了标定，并对图像中的特征点进行了立体匹配，现假设两摄像机 c_1 、 c_2 的自由空间与计算机像素坐标转换的矩阵分别为 \mathbf{M}_{c_1} 、 \mathbf{M}_{c_2} 。则有：

$$Z_{C_1} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ v_{c1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 & m_{13}^1 & m_{14}^1 \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 & m_{23}^1 & m_{24}^1 \\ m_{31}^1 & m_{32}^1 & m_{33}^1 & m_{34}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$Z_{C_2} \begin{bmatrix} u_{c2} \\ v_{c2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 & m_{13}^2 & m_{14}^2 \\ m_{21}^2 & m_{22}^2 & m_{23}^2 & m_{24}^2 \\ m_{31}^2 & m_{32}^2 & m_{33}^2 & m_{34}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

其中, $(u_{c1}, v_{c1}, 1)$ 与 $(u_{c2}, v_{c2}, 1)$ 分别为空间点 P 在两台摄像机图像上的投影点 P_1 和 P_2 像素坐标; (X_w, Y_w, Z_w) 为点 P 在空间自由坐标系下的坐标; $m_{ij}^k (k=1, 2; i=1, 2, 3; j=1, 2, 3, 4)$ 分别是 \mathbf{M}_{c_k} 的第 i 行第 j 列元素。由上面两个公式消去 Z_{C_1} 和 Z_{C_2} , 可以得到关于 (X_w, Y_w, Z_w) 的方程

$$\begin{cases} (u_1 m_{31}^1 - m_{11}^1)X + (u_1 m_{32}^1 - m_{12}^1)Y + (u_1 m_{33}^1 - m_{13}^1)Z = m_{14}^1 - u_1 m_{34}^1 \\ (v_1 m_{31}^1 - m_{21}^1)X + (v_1 m_{32}^1 - m_{22}^1)Y + (v_1 m_{33}^1 - m_{23}^1)Z = m_{24}^1 - v_1 m_{34}^1 \\ (u_2 m_{31}^2 - m_{11}^2)X + (u_2 m_{32}^2 - m_{12}^2)Y + (u_2 m_{33}^2 - m_{13}^2)Z = m_{14}^2 - u_2 m_{34}^2 \\ (v_2 m_{31}^2 - m_{21}^2)X + (v_2 m_{32}^2 - m_{22}^2)Y + (v_2 m_{33}^2 - m_{23}^2)Z = m_{24}^2 - v_2 m_{34}^2 \end{cases} \quad (36)$$

其中, $m_{ij}^k (k=1, 2; i=1, 2, 3; j=1, 2, 3, 4)$ 为前文所测摄像机的参数, 故将上式联立, 就可求解出点 P 的坐标 (X_w, Y_w, Z_w) 。通常在操作中, 由于实际情况的限制, 摄像机所获得的图像难免会有噪声, 因此采用最小二乘法来求解空间点的坐标。即可重构出原图像。对于求解完成的三维坐标, 首先进行曲线拟合, 之后可进行插值处理, 见附录。

为了验证上述程序进行实验, 结果如下所示

➤ 仿真实验

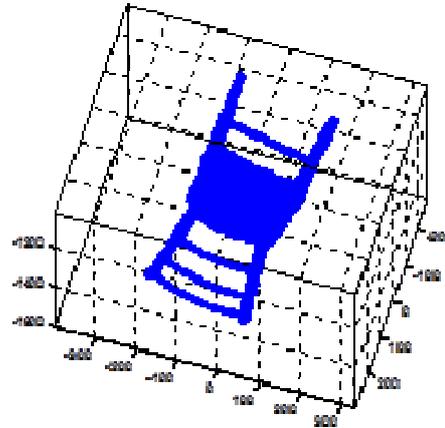


图 16 原始图像

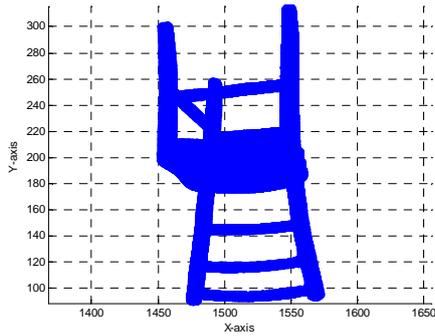


图 17 摄像机 1 所获取的图像

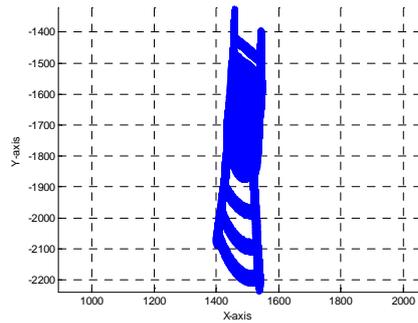


图 18 摄像机 2 所获取的图像

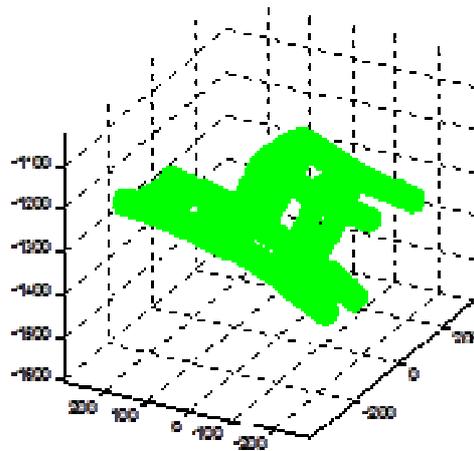


图 19 重构图像

➤ 实测实验

由于缺少线激光源和转盘旋转，这里采用白色条带代替线激光源，扫描物体，同时为了避免没有旋转转盘带来的麻烦，这里选用了圆柱形物体，即它每次扫描的形状都是统一的。



图 20 实物图

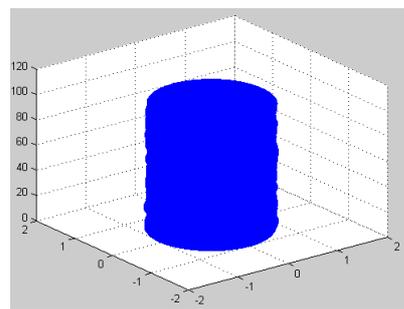


图 21 重构图

首先由于三维图像中所占像素点太多，数据量较大，这里压缩了图像质量。由上述实验可以看出，三维重构并不能完全重构原始图像，一方面是由于各种误差所导致，另一方面，由于匹配窗口的设置，导致其分辨率降低，新的重构图像较原图有所模糊。

5.3 自制 3D 扫描系统的工作参数

前文中，主要研究了 3D 扫描系统的设备构成，工作原理等。现在假定自制 3D 扫描系统的内参数和外参数已经提前获取，下面就其工作的性能参数指标进行讨论。

5.3.1 系统分辨率

前文当中，在输入的计算机像素图像中采用 $a \times a$ 大小的窗口进行匹配，那么可以得到，由此完成的三维像素格中最小分辨率相当于摄像机获取的计算机图像的 $a \times a$ 倍。假定计算机像素坐标系中，存在 (a, a) ，那么将其代入公式 (8)，得到：

$$z_c \begin{bmatrix} a \\ a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{dx} & \lambda & u_0 \\ 0 & \frac{f}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3 \ \mathbf{t}] \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

令 $\mathbf{r}_1 = [r_{11} \ r_{21} \ r_{31}]'$ ， $\mathbf{r}_2 = [r_{12} \ r_{22} \ r_{32}]'$ ， $\mathbf{r}_3 = [r_{13} \ r_{23} \ r_{33}]'$ ， $\mathbf{t} = [t_1 \ t_2 \ t_3]'$ ，假定摄像机离物体的最近处距离为 l_j ，即在摄像机坐标系当中，代入，求解上述方程，得到：

$$X_w = \left[\frac{f}{dx} \frac{f}{dy} (r_{13} r_{22} t_3 + r_{12} r_{33} t_2 + r_{23} r_{32} t_1 + r_{12} r_{23} z_c - r_{12} r_{23} t_3 - r_{13} r_{32} t_2 - r_{22} r_{33} t_1 - r_{13} r_{22} z_c) + \frac{a z_c f}{dx} (r_{13} r_{32} - r_{12} r_{33}) \right. \\ \left. + \frac{a z_c f}{dy} (r_{22} r_{33} - r_{23} r_{32}) + z_c \left(a \lambda + \frac{u_0 f}{dy} - \lambda v_0 \right) (r_{23} r_{32} - r_{22} r_{33}) + \frac{v_0 z_c f}{dx} (r_{12} r_{33} - r_{13} r_{32}) \right] / \\ \frac{f}{dx} \frac{f}{dy} (r_{11} r_{22} r_{33} + r_{12} r_{23} r_{31} + r_{13} r_{21} r_{32} - r_{11} r_{23} r_{32} - r_{12} r_{21} r_{33} - r_{13} r_{22} r_{31}) \quad (38)$$

$$Y_w = \left[\frac{f}{dx} \frac{f}{dy} (r_{11} r_{23} t_3 + r_{13} r_{31} t_2 + r_{21} r_{33} t_1 + r_{13} r_{21} z_c - r_{13} r_{21} t_3 - r_{11} r_{33} t_2 - r_{23} r_{31} t_1 - r_{11} r_{23} z_c) + \frac{a z_c f}{dx} (r_{11} r_{33} - r_{13} r_{31}) \right. \\ \left. + \frac{a z_c f}{dy} (r_{23} r_{31} - r_{21} r_{33}) + z_c \left(a \lambda + \frac{u_0 f}{dy} - \lambda v_0 \right) (r_{21} r_{33} - r_{23} r_{31}) + \frac{v_0 z_c f}{dx} (r_{13} r_{31} - r_{11} r_{33}) \right] / \\ \frac{f}{dx} \frac{f}{dy} (r_{11} r_{22} r_{33} + r_{12} r_{23} r_{31} + r_{13} r_{21} r_{32} - r_{11} r_{23} r_{32} - r_{12} r_{21} r_{33} - r_{13} r_{22} r_{31}) \quad (39)$$

$$Z_w = \left[\frac{f}{dx} \frac{f}{dy} (r_{12}r_{21}t_3 + r_{11}r_{32}t_2 + r_{22}r_{31}t_1 + r_{11}r_{22}z_c - r_{11}r_{22}t_3 - r_{12}r_{31}t_2 - r_{21}r_{32}t_1 - r_{12}r_{21}z_c) + \frac{az_c f}{dx} (r_{12}r_{31} - r_{11}r_{32}) \right. \\ \left. + \frac{az_c f}{dy} (r_{21}r_{32} - r_{22}r_{31}) + z_c \left(a\lambda + \frac{u_0 f}{dy} - \lambda v_0 \right) (r_{22}r_{31} - r_{21}r_{32}) + \frac{v_0 z_c f}{dx} (r_{11}r_{32} - r_{12}r_{31}) \right] / \\ \frac{f}{dx} \frac{f}{dy} (r_{11}r_{22}r_{33} + r_{12}r_{23}r_{31} + r_{13}r_{21}r_{32} - r_{11}r_{23}r_{32} - r_{12}r_{21}r_{33} - r_{13}r_{22}r_{31}) \quad (40)$$

其中， $z_c = l_j$ 那么，即得到了自由空间坐标系当中各个方向对应一个像素的具体物理尺寸，显然，摄像机与物体的距离越远，分辨率就越差，其次，匹配扫描的窗口越大，分辨率也随之变差。

为此，进行如下实验：

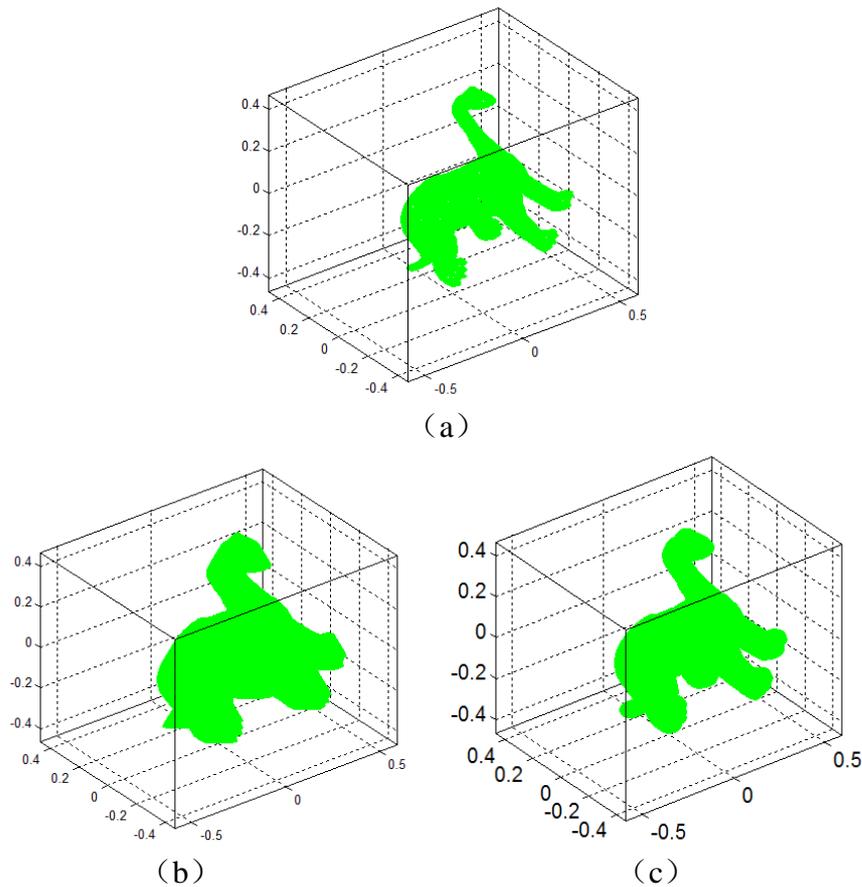


图 22 分辨率对比图

首先，上图都做了图像压缩处理。上图 (a) 为原始图像，图 (b) 为增大了匹配窗口之后产生的图像，图 (c) 为增大了物体与摄像机之间的距离产生的图像。从上述实验可以得知，摄像机与物体的距离越远，分辨率就越差，其次，匹配扫描的窗口越大，分辨率也随之变差。当然为了分辨率，一味地调小匹配窗口，增近物体与摄像机之间的距离也不行，后面将对此开展分析。

5.3.2 扫描尺寸的限制

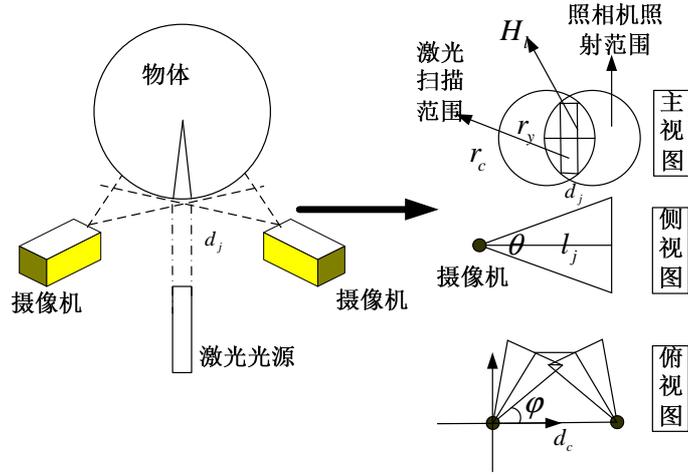


图 23 扫描尺寸计算示意图

如图所示，采用两个摄像机对物体照射。其中，由于采用了转盘旋转，激光光源照射，扫描整个物体，理论上，只要物体的转盘足够大，扫描时间足够，无论物体有多宽有多大，都可以通过旋转照射扫描物体。因此，限制物体宽度和长度的主要是物体旋转转盘。假定转盘的面积为 πR_z^2 ，物体的长度小于 R_z 即可。

而对于物体的高度，如图所示，由于镜头角度 θ 存在，摄像机所照射范围有限，那么高度向被限制。现假定两个摄像机光心离物体的最近处距离为 l_j ，那么摄像机在物体表面的测试圆的半径为：

$$r_c = \tan \frac{\theta}{2} l_j \quad (41)$$

假定摄像机的偏转角度为 φ ，两个摄像机光心相距 d_c ，那么由图可得，主视图中，两个圆的圆心距离：

$$r_y = \frac{d_c - l_j \cos(\frac{\theta}{2} + \varphi)}{2} \quad (42)$$

根据图中各个视图之间的关系，利用几何原理，可以得到高度限制为：

$$H_l \leq \sqrt{r_c^2 - \left(\frac{2r_c - r_y - 2d_x}{2} + d_x\right)^2} \quad (43)$$

其中，偏转角度 φ ，摄像机镜头角度 θ ，两个摄像机距离 d_c 、激光照射宽度 d_x 以及物体离摄像机的距离 l_j 都可以事先获知，因此，综上所述，系统的分辨率为：

$$\left\{ \begin{array}{l} L_l \leq R_z \\ W_l \leq R_z \\ H_l \leq \sqrt{r_c^2 - \left(\frac{2r_c - r_y - 2d_x}{2} + d_x\right)^2} \end{array} \right. \quad (44)$$

5.3.3 系统扫描速度

➤ 转盘转动扫描时间

每次激光照射宽度为 d_x ，即照射的角度为：

$$\phi = 2 \arccos \frac{d_x}{2R_z} \quad (45)$$

则旋转所需要的次数为 $\frac{2\pi}{\phi}$ 。另外，假设摄像头在一般分辨率的模式下最高

帧率都在 f_{ps} ，则扫描时间为：

$$\frac{2\pi}{\phi f_{ps}} \quad (46)$$

➤ 电脑处理时间

首先，摄像机每次拍摄的画面，在自由空间坐标系当中，其宽度为 d_x ，高度为 H_l 。将 $X_w = d_x$ ， $Y_w = H_l$ 代入公式 (8)，即可得到，像素图像坐标系每次需要扫描的范围（采用 MATLAB 计算本次结果，详细过程见附录）：

$$\left\{ \begin{array}{l} u_l = \left[\frac{f}{dx} t_1 + \lambda t_2 + u_0 t_3 + d_x \left(\frac{f}{dx} r_{11} + \lambda r_{21} + u_0 r_{31} \right) + H_l \left(\frac{f}{dx} r_{21} + \lambda r_{22} + u_0 r_{32} \right) \right] / l_j \\ v_l = \left[\frac{f}{dy} t_2 + v_0 t_3 + d_x \left(\frac{f}{dy} r_{21} + v_0 r_{31} \right) + H_l \left(\frac{f}{dy} r_{22} + v_0 r_{32} \right) \right] / l_j \end{array} \right. \quad (47)$$

(1) 匹配时间

不失一般性，采用窗口锁定摄像机 1 的计算机像素坐标系，在摄像机 2 的像素坐标系中寻找匹配度。那么，摄像机 1 的计算机像素坐标系一共需要移动

$\frac{u_l v_l}{a^2}$ ，对于摄像机 1 的计算机像素坐标系每锁定一个窗口，另外一个窗口，

最大匹配需要移动 $\frac{u_l}{a}$ ，最小匹配需要 1 次，即最后一次，且每次呈现递减趋势。

一共需要：

$$\frac{1}{2} \frac{u_l v_l}{a^2} \left(\frac{u_l}{a} + 1 \right) \quad (48)$$

(2) 重构时间

重构时间为计算公式与公式的时间，这和电脑 CPU 的计算能力有关，而且随着运行的时间变长而变长，那么电脑每次运算时间为 $s_{c1} e^{s_{c2}t}$ 。由于单个方程计算时间的变化对于总时间来说很小，因此，可以将此认为是定值，那么，综合所述，整个系统扫描时间为：

$$t_{all} = s_{c1} e^{s_{c1}t} \frac{1}{2} \frac{u_l v_l}{a^2} \left(\frac{u_l}{a} + 1 \right) + \frac{2\pi}{\phi f_{ps}} \quad (49)$$

其中，扫描时间并没有添加标定时间，因为标定可以事先完成，不影响物体的扫描。

6. 模型总结与展望

6.1 工作总结

6.1.1 模型的优点

1)、本文首先基于生物学和生理学，分析人类视觉系统，模仿两只眼睛与人类视觉的立体感知过程，从而选取设备构造系统。

2)、文章查阅了大量权威的资料，详细解释了如何对摄像机的参数进行求解以及构建了三维重构模型，并实际动手实现了仿真实验和实测数据，成功了证明了，从而确保了模型的实用性。

3)、对于描绘的 3D 扫描产品工作参数进行了详细的分析和计算，并对相关参数进行了实际实验，给出了可视化的结果。

6.1.2 模型的缺点

- 1)、实测物体较为简单，而且具有人为的干扰；
- 2)、对于图片处理没有进行过多的描绘。

6.2 工作展望

1、实验当中，图片的拍摄手段以及图片的处理并不理想，导致光学图片质量不高，需要手工的进行弥补，关于这部分文章并没有讨论，值得进一步的加强；

2、在物体的立体结构重构部分，虽然通过实验证明，我们能够在一定程度上实现对物体的重构，但是效果并不理想，一方面这与我们摄像机拍摄的图像效果有关，但是更多的与坐标点的匹配有很大的关系，因此对于匹配工作的研究有待加强，其次，在重建工作当中，我们直接简单对获取的三维立体信息插值，然后采用的点云的形式来描绘物体，效果并不理想。诸如三角剖分、曲线拟合等等多种方法都可以运用于重建工作；

3、在本文的第三个问题当中，偏转角度，摄像机镜头角度，两个摄像机距离、激光照射宽度以及物体离摄像机的距离都对物体的扫描体积进行了限制，然

而，在实际当中，我们可以采用带有刻度升降平台来消除这种限制，由于该物品构造较为困难，本文没有做过多的研究。

参考文献

- [1] Sunziyi. 投影仪 + 摄像头在家DIY一台简装3D扫描仪 .
<http://office.pconline.com.cn/633/6330336.html>. 2015年9月12日.
- [2] Kyriakos Herakleous , Charalambos Poullis. 3DUNDERWORLD-SLS: An open-Source Structured-Light Scanning System for Rapid Geometry Acquisition
<http://arxiv.org/pdf/1406.6595v1.pdf> 2014.6.26.
- [3] 赵小松, 张宏伟, 张国雄, 李真. 摄像机标定技术研究. 机械工程学报. 2002, 38(3): 149-151.
- [4] 周富强, 蔡斐华. 基于非量测畸变校正的摄像机标定方法. 机械工程学报. 2009, 45(8): 228-232.
- [5] 张振宇. 基于双目立体视觉的三维重构技术研究. 南京: 东南大学. 2009.
- [6] 姜启源. 数学模型, 北京: 高等教育出版社, 2005.
- [7] 周开利, 康耀红. 神经网络模型及其MATLAB仿真程序设计[M]. 清华大学出版社,第1版, 2005.7.