



2015 湖南省研究生数学建模竞赛参赛承诺书

我们仔细阅读了湖南省研究生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权湖南省研究生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号是（从组委会提供的试题中选择一项填写）：A

我们的参赛报名号为（如果组委会设置报名号的话）：008

所属学校（请填写完整的全名）：国防科学技术大学

参赛队员（打印并签名）：1. 贾玉华

2. 夏博远

3. 王岩

指导教师或指导教师组负责人(打印并签名)：

日期：2015年9月13日

评阅编号（由组委会评阅前进行编号）：

2015 湖南省研究生数学建模竞赛

编号专用页

评阅编号（由组委会评阅前进行编号）：

评阅记录（可供评阅时使用）：

评阅人										
评分										
备注										

湖南省首届研究生数学建模竞赛

题目 基于投影-摄像工具的 3D 扫描系统的构建

摘要：

本文首先分析 3D 扫描系统的工作原理：将某种光投射到物体表面，根据采集到的反射信息重构物体表面三维信息。根据该原理，结合生活尝试，我们尝试创新利用摄像机、投影仪和电脑构建了简易 3D 扫描系统，该系统的工作原理为：首先用电脑控制投影仪发射特定光线，发射光线经过被测物体表面反射，反射光线被摄像机采集并把采集到光线的数字化信息传输到电脑中。通过入射光线在投影仪图像平面和反射光线在摄像机成像平面的位置信息，通过一定算法获取被测物体被照射点的三维信息。

之后对该系统进行建模分析：（1）为了描述方便，建立了五类坐标系，分别为世界坐标系、摄像机坐标系、摄像机图像坐标系、投影仪坐标系和投影仪图像坐标系，并推导了五类坐标系之间的相互转化关系；（2）通过点对的方法，采集 6 组样点，利用反解方程组获取摄像机、投影仪、世界坐标系的相对位置参数；

（3）通过线结构光扫描法实现对被测物体表面的扫描，并进行入射光线和反射光线的匹配；（4）最后，通过发射光线和反射光线的坐标位置信息，利用光线传播反射原理重构被测物体表面被照射点的三维信息。

文章的最后对该模型的扫描速度、扫描区域尺寸和分辨率进行了细致分析，并分析了该模型的优缺点，提出来改进的方法，验证了该系统的可行性。

文章的创新点在于：（1）利用日常生活中常见的摄像机、投影仪和电脑构建了 3D 扫描系统；（2）提出控制投影仪发射横竖两个方向的线光源，来进行发射光和入射光的匹配，精度较高。

1.问题重述

对于 3D 扫描仪而言，目前最常见的是非接触主动式扫描仪，其基本原理是先将某种光投射到物体表面，再根据采集到的反射信息重构物体表面三维信息。

然而商用专业 3D 打印机需要专业设备且价格较高，很难实现大众化。因此本文要解决的问题正是：

(1) 回答能否利用普通投影仪和家用数码相机、摄像机等常见设备（不限于这些设备）构建一个简单的 3D 扫描系统？如果上述设想可行，进一步解决下面的问题。

(2) 详细描述该系统的设备构成，工作方式和重构算法。

(3) 讨论该系统的分辨率、速度、扫描区域的尺寸限制等技术指标。

2.问题分析

常见 3D 扫描仪为非接触主动式扫描仪，其工作原理是：将某种光投射到物体表面，根据采集到的反射信息重构物体表面三维信息。下面我们对于该问题进行分析：

(1) 根据其工作原理，可知本课题所需的 3D 扫描系统需要具备发射光线、采集反射光线两种最基本的功能。而我们生活中常见的投影仪、摄像机可以分别满足发射光线、采集光线的功能，因此，理论上说，利用投影仪和摄像机构建一个简单的 3D 扫描系统是可行的。

(2) 经过查阅对比分析，我们认为必须使用数字化技术重构物体三维图像，因为只有图像信息数字化之后才可以利用计算机技术进行相应处理。这就需要把发射光线的光源位置、接受反射光线的位置转化为数字模型。表示物体的位置信息一般采用坐标的形式，然而投影仪图像所在平面、投影仪镜头、待扫描物体、摄像机镜头、摄像机成像单元所在平面处于五个不同的空间，很难在统一的坐标系中表示。经过分析，我们决定针对五个不同空间，建立五个不同坐标系通过坐标形式表示图像的位置信息。

(3) 图像信息数字化之后，如何根据发射光线和反射光线的信息确定物体表面被照射点的三维信息。为了获取物体表面被照射点的三维信息，可以根据光线传播、反射原理，不同坐标系之间坐标的转换方法，如图 1 所示，利用位置关系（反射点、像点、投影点）以及测量系统的参数（平移量、旋转量）来获取被测物体表面被照射点的位置信息。

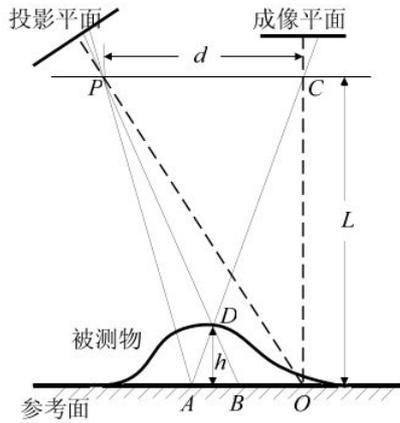


图1 获取被测物三维信息原理图

(4) 原理上实现之后，还有重要的两步就是投影仪的投射方式以及对入射光线在投影仪中的信息和反射光线在摄像机中的信息进行匹配，即将测量系统中的物体表面被照射点、光线反射点、光源投射点之间对应起来，匹配之后才能得知摄像机中所采集图像的某一点对应投影仪中哪个位置发射的光线，进而才能利用入射光线在投影仪中的位置信息和反射光线在摄像机中的位置信息对物体被照射点的三维信息进行重建。

3.符号说明

- (1) Hz: 赫兹，表示投影仪每秒钟图像刷新的次数；
- (2) fps: 表示摄像机每秒钟采集的图像帧数；
- (3) (du, dv) : 表示像元尺寸，单位为 mm/pixel，表示每个像元的长宽尺寸；
- (4) $x*y$: 表示分辨率，代表每英寸在水平方向和垂直方向上含有的像元数量，单位为 ppi，表示像素/英寸。
- (5) f_c, f_p : 分别表示摄像机、投影仪镜头的焦距，即焦点到镜头光心的距离；
- (6) R_c, T_c : 表示摄像机镜头坐标系关于世界坐标系的旋转量和位移量；
- (7) R_p, T_p : 表示投影仪镜头坐标系关于摄像机镜头坐标系的旋转量和位移量。

4.模型假设

- (1) 假设投影仪和摄像机的镜头均不存在畸变；
- (2) 假设投影仪图像平面中心位于投影仪镜头的光轴所在直线上、摄像机成像平面的中心位于摄像机镜头的光轴所在直线上；
- (3) 假设系统所用投影仪的分辨率为 1366*768ppi，刷新频率为 80Hz，成像芯片为 0.61 英寸，镜头焦距为 18.5mm；
- (4) 假设系统所用摄像机的分辨率为 1024*1024ppi，采集图像的频率为 15fps，

镜头焦距为 80mm，成像芯片的尺寸为 0.25*0.19 英寸；

(5) 假设被测物体中心距离摄像机镜头光心、投影仪镜头光心的距离分别为 500mm、50mm。

5.模型的建立和求解

我们设想的 3D 扫描系统如图 5.1 所示，由两台电脑、一台投影仪、一台摄像机组成。

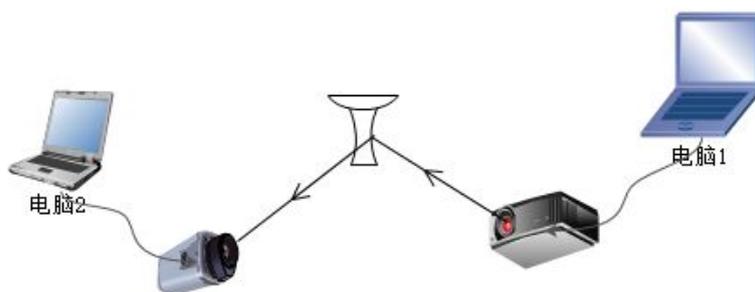


图 5.1 3D 扫描系统设想图

其工作原理如下：首先电脑 1 控制投影仪发射线结构光线，并存储发射光线的位置信息，发射光线经过被测物体表面反射，反射光线被摄像机采集并把采集到光线的数字化信息传输到电脑 2 中。通过入射光线在投影仪图像平面和反射光线在摄像机成像平面的位置信息，通过一定算法获取被测物体被照射点的三维信息。

首先对该系统进行物理抽象表示，如图 5.2 所示，

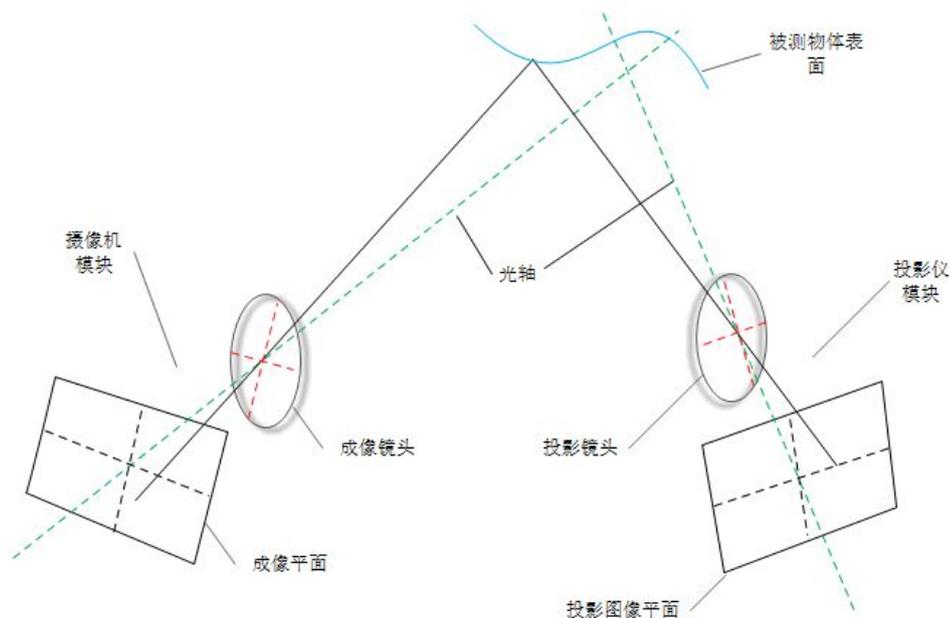


图 5.2 3D 扫描系统抽象表示图

3D 扫描系统的工作流程如图 5.3 所示，黄色菱形为实际操作步骤。下一小节将根据该工作流程，建立相关模型。

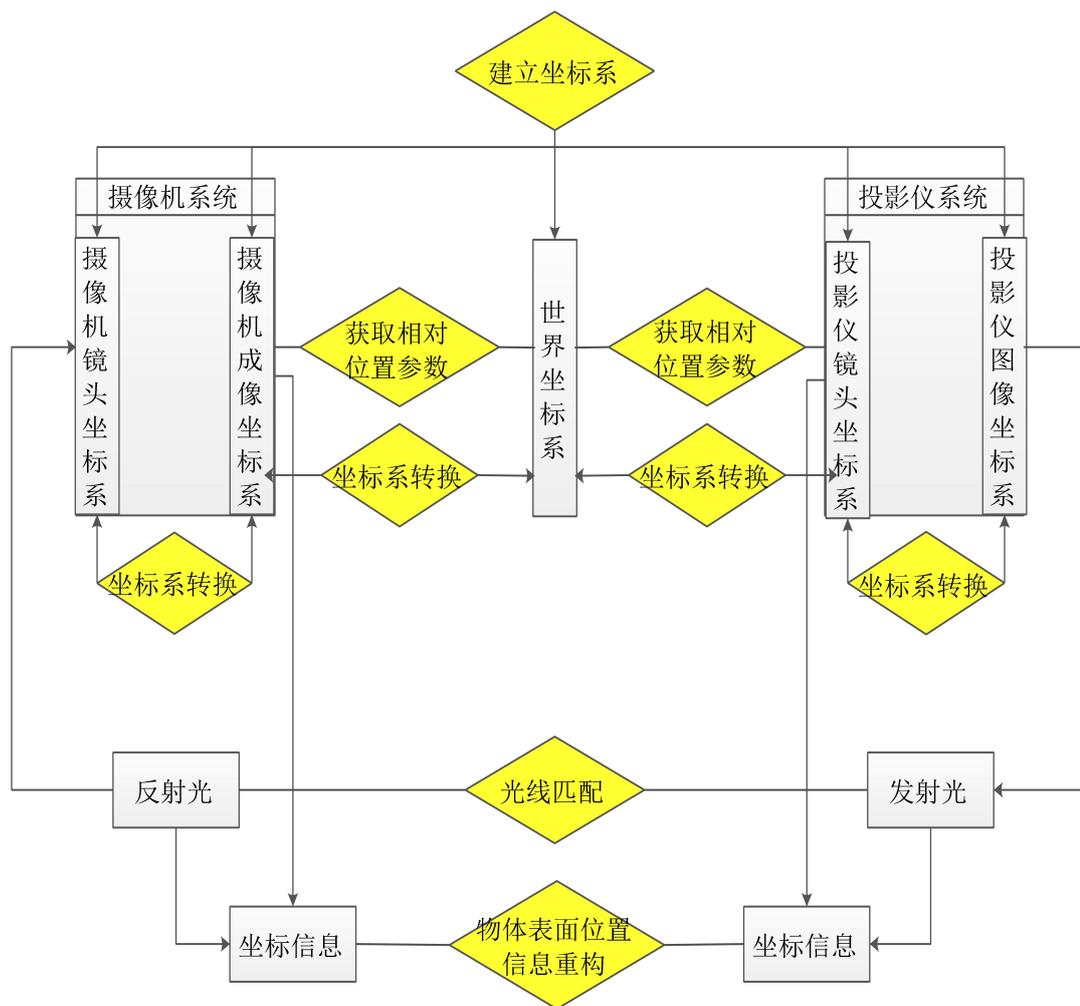


图 5.3 工作流程图

5.1 建立坐标系

投影仪图像所在平面、投影仪镜头、待扫描物体、摄像机镜头、摄像机成像单元所在平面处于五个不同的空间，所以在建模之前，为了方便描述点的位置信息，首先我们针对每个空间建立坐标系以及在不同坐标系统下的坐标表示，如图 5.4 所示。

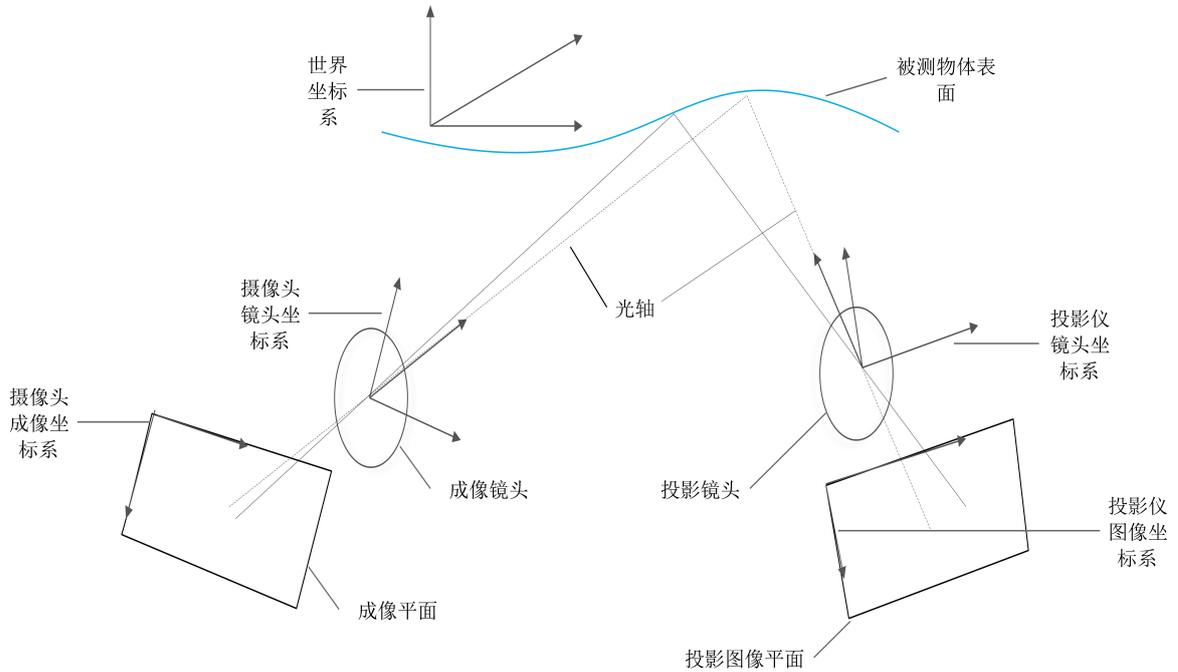


图 5.4 坐标系图

- (1) 世界坐标系： $O_w - X_w Y_w Z_w$ ，坐标点： (X_w, Y_w, Z_w) 。
- (2) 摄像机镜头坐标系： $O_c - X_c Y_c Z_c$ ，坐标点： (X_c, Y_c, Z_c) ，摄像机镜头的光心为坐标原点。
- (3) 投影仪镜头坐标系： $O_p - X_p Y_p Z_p$ ，坐标点： (X_p, Y_p, Z_p) ，投影仪镜头的光心为坐标原点。
- (4) 摄像机成像图像坐标系： $O_c - U_c V_c$ ，坐标点： (U_c, V_c) ，摄像机图像的左上角点为坐标原点。
- (5) 投影仪投影图像坐标系： $O_p - U_p V_p$ ，坐标点： (U_p, V_p) ，投影仪投影图像的左上角点为坐标原点。

5.2 投影仪、摄像机、世界坐标系的相对位置参数获取

不同坐标系之间坐标的转换需要已知两个坐标系的相对位置关系^[1]，因此在对 3D 扫描系统进行不同坐标系之间的坐标转换之前，首先要获取投影仪、摄像机、世界坐标系之间的相对位置关系。

一个坐标系通过旋转和位移两步即可与另外任何位置的坐标系重合，所以本文建立旋转矩阵 R 、位移向量 T 两个参数来表示不同坐标系之间的位置关系，下面分析如何获取这两个参数。

以摄像机的参数 R_c 、 T_c 为例进行说明，因为坐标系的旋转和位移均在三维

间中进行，所以我们用 3*3 的矩阵表示 R_c ，用 3*1 的列向量表示 T_c ，表达形式如下所示：

$$R_c = \begin{bmatrix} r_{c1} & r_{c2} & r_{c3} \\ r_{c4} & r_{c5} & r_{c6} \\ r_{c7} & r_{c8} & r_{c9} \end{bmatrix}, T_c = \begin{bmatrix} t_{c1} \\ t_{c2} \\ t_{c3} \end{bmatrix}$$

R_c 中每一行的行向量分别表示摄像机镜头坐标系的三个坐标轴关于世界坐标系中三个坐标轴的方向向量， T_c 中的向量表示摄像机镜头坐标系原点关于世界坐标系原点的位移量。

R_c 、 T_c 中各元素之间相互独立，互不影响，因此我们需要求解 12 个独立变量。针对以上求解需求，我们采用点对的方式来解决。点对，即世界坐标系里某一点的坐标和摄像机图像坐标系里对应点的坐标，构成一个点对。即：

$$P((x_w^D, y_w^D, z_w^D), (u_c^D, v_c^D))$$

为保证方程组有实解，我们至少需要 6 个点对。然后反解方程组，就可以得到 12 个独立变量。关于点对的选取，关键在于对应点的选择是否正确。为保证点的正确选择，排除不必要的干扰因素，在实际操作中，我们对投影仪光源进行点结构光控制，这样在摄像机图像上得到的点一定是世界坐标系里的那个点，这样就可以实现精确匹配^[2]。

首先，在世界坐标系里选取六组不同的位置坐标点：

$$(x_w^{D1}, y_w^{D1}, z_w^{D1}), (x_w^{D2}, y_w^{D2}, z_w^{D2}), (x_w^{D3}, y_w^{D3}, z_w^{D3}), (x_w^{D4}, y_w^{D4}, z_w^{D4}), (x_w^{D5}, y_w^{D5}, z_w^{D5}), (x_w^{D6}, y_w^{D6}, z_w^{D6})$$

然后在摄像机图像上确定对应的像素坐标：

$$(u_c^{D1}, v_c^{D1}), (u_c^{D2}, v_c^{D2}), (u_c^{D3}, v_c^{D3}), (u_c^{D4}, v_c^{D4}), (u_c^{D5}, v_c^{D5}), (u_c^{D6}, v_c^{D6}),$$

将点对代入公式 5-1 中，即可反解得出相应的位置参数。

对于投影仪镜头坐标系和摄像机镜头坐标系之间的位置参数 R_p 、 T_p ，表达方式如下：

$$R_p = \begin{bmatrix} r_{p1} & r_{p2} & r_{p3} \\ r_{p4} & r_{p5} & r_{p6} \\ r_{p7} & r_{p8} & r_{p9} \end{bmatrix}, T_p = \begin{bmatrix} t_{p1} \\ t_{p2} \\ t_{p3} \end{bmatrix}$$

由于光路可逆，其推导过程和思路与摄像机类似，这里不再赘述，需要注意一点，选取相应点之后，要把其坐标代入公式 5-6 中。

5.3 入射光和发射光的对应关系

得到投影仪和摄像机的位置参数之后，还要确定入射光线和反射光线的对应关系，才能知道摄像机中采集到的图像中某一坐标点的光线对应投影仪中发射该

光线的光源坐标，进而才能进行物体表面三维信息的重构^[3]。

下面我们对投影仪投射方法进行分析，通过查阅资料我们发现投射方法主要如图 5.5 所示^[4]：

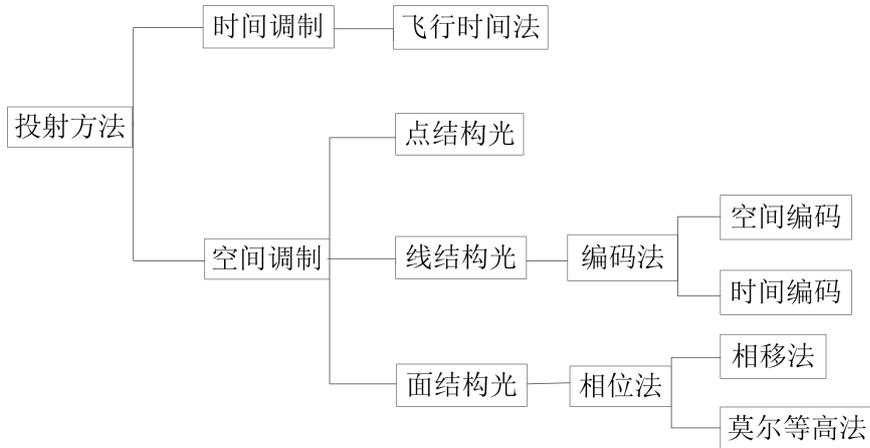


图 5.5 投射方法图

通过分析比较，我们认为时间调制对于时间精度的要求较高，较难实现，所以我们选择空间调制方法。空间调制方法又分为三种：

1.对于点结构光法，就是投影仪在工作过程中，一次只向被测物体表面投一个点作为标志点，摄像机或者其它的成像工具对其进行成像，这样就可以一个一个的把投影仪中光线位置的信息和摄像机中成像位置的信息对应起来，精度较高。但是进一步分析我们发现，这种方法的效率极其低，假设投影仪的分辨率为1366*768，投影仪的图像刷新频率为50Hz/s那么整个过程需要大约5.8个小时，这显然是不符合实际的。

2.线结构光法是跟点结构光相比，大幅提高了工作效率，每次向被测物体表面投射一条线。仍然以上面假设为例，利用横向线结构光法进行扫描，整个过程用时大约27秒^[1]。

3.面结构光法在原理上和前两种方法是相同的，只是此方法不需要对物体进行扫描，而是发射一副或几幅有纹理结构的图案，通过图案的特征对投影点和成像点进行匹配。这种方法重构时间少，而且对系统的精度要求不高，但是匹配的算法比较麻烦，对投影仪的精度要求也比较高，实现起来也比较困难。

通过对三种方法的分析比较，我们决定采用折中的方法，即线结构光法作为投影的方法。那么匹配就比较简单了，当发射横向线结构光时，可以对入射光发射点和反射光成像点的纵坐标进行匹配；当发射纵向线结构光时，可以对入射光发射点和反射光成像点的横坐标进行匹配，具体方法如下：

首先，发射纵向线结构光，以图 5.6 为例，投影仪底片为8*8的分辨率，共64个像素点，依次对像素横坐标为1的所有像点至像素横坐标为8的所有像点进行高亮显示。每一次发射光线，记录下投影仪中高亮像素点的横坐标和摄像机中每一个采集到光线的点的坐标。其次利用相同的方法发射横向线结构光。

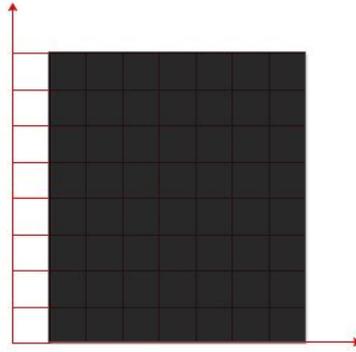


图 5.6 纵向线结构光

仍以上图为例，假设，纵向线结构光扫描时，摄像机成像坐标系中坐标为 (x, y) 的成像点 A 接收到投影仪中第 m 列像素点发射的光线。横向线结构光扫描时，摄像机成像点 A 接收到投影仪中第 n 行像素点发射的光线，那么摄像机成像坐标系中坐标为 (x, y) 的点采集到的光线来自投影仪底片坐标为 (m, n) 的像素点所发射的光线。这样，就完成了入射光和反射光的位置信息匹配工作。

5.4 不同坐标系之间点的坐标的转换

本小节建立不同坐标系之间的转换模型，工作流程如图 5.7 所示。下面以点 D 为例进行建模分析。

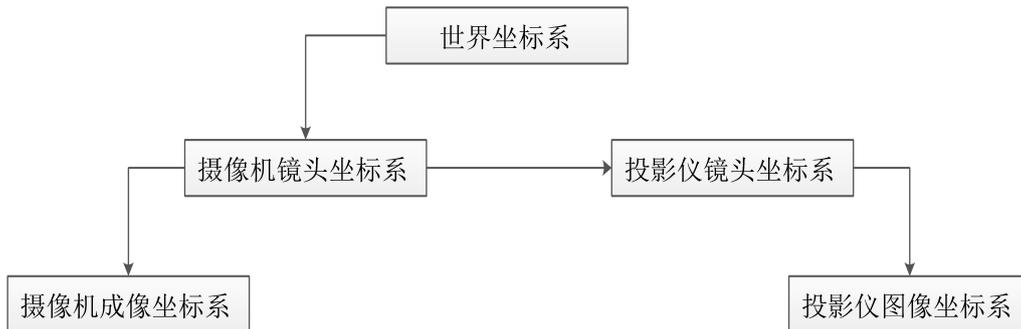


图 5.7 坐标之间的转换关系图

5.4.1 世界坐标系、摄像机坐标系、投影仪坐标系之间点坐标转换

我们假设某点 D 在世界坐标系中的坐标为 (x_w^D, y_w^D, z_w^D) ，在摄像机镜头坐标系中的坐标为 (x_c^D, y_c^D, z_c^D) ，那么可以得到摄像机镜头坐标系与世界坐标系之间的转换关系，如公式 5-1 所示：

$$\begin{bmatrix} x_c^D \\ y_c^D \\ z_c^D \end{bmatrix} = R_c \begin{bmatrix} x_w^D \\ y_w^D \\ z_w^D \end{bmatrix} + T_c \quad \text{公式 5-1}$$

同理可以得到投影仪镜头坐标系和摄像机镜头坐标系中坐标的转换关系，如

公式 5-2 所示：

$$\begin{bmatrix} x_p^D \\ y_p^D \\ z_p^D \end{bmatrix} = R_p \begin{bmatrix} x_c^D \\ y_c^D \\ z_c^D \end{bmatrix} + T_p \quad \text{公式 5-2}$$

5.4.2 摄像机、投影仪中镜头和成像（图像）坐标系中点的坐标转换

(1) 摄像机镜头和成像坐标系中点的坐标转换关系：

在理想情况下，摄像机的拍摄过程可看作是一个针孔成像模型，成像过程可近似为把摄像机坐标系上的某一个点经过摄像机镜头的光心，投影到摄像机的焦平面上，如图 5.8 所示。

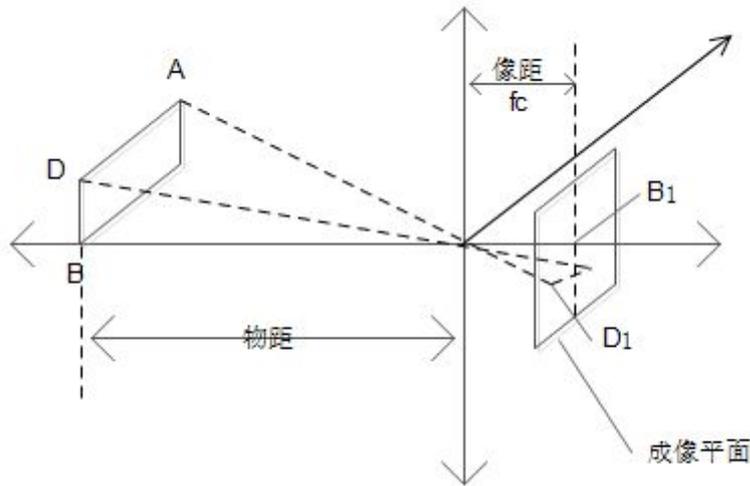


图 5.8 摄像机成像图

现假设在摄像机镜头坐标系中某点 D 的坐标为 (x_c^D, y_c^D, z_c^D) ，同时 D 点在焦平面上所成的像点 D1 坐标为 $(x_c^{D1}, y_c^{D1}, z_c^{D1})$ ，那么根据物理光学中针孔成像的原理，我们可以得到点 D 与点 D1 的坐标关系。如公式 5-3：

$$\begin{cases} x_c^{D1} = -f_c \frac{x_c^D}{z_c^D} \\ y_c^{D1} = -f_c \frac{y_c^D}{z_c^D} \\ z_c^{D1} = f_c \end{cases} \quad \text{公式 5-3}$$

因为所有的像点都在焦平面上，所有恒有 $z_c^{D1} = f_c$ ，坐标中 x, y, z 的单位为

mm。

与此同时，由针孔成像模型的规律易知，物点和对应的像点的位置关系是上下相反，左右颠倒的，但是，在摄像机成像坐标系中物点和像点上下左右位置关系是一致的，因此如图 5.9 所示。

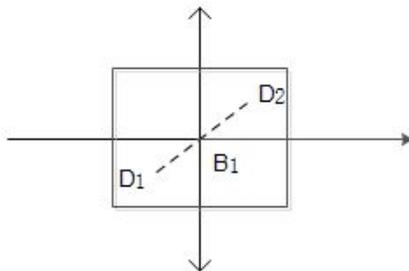


图 5.9 摄像机镜头和图像的位置关系

在上图中， B_1 是摄像机光轴与镜头焦平面的交点， D_1 是点 D 在摄像机镜头坐标系中的像点， D_2 则为点 D 映射到摄像机图像坐标系中的点，由图可知， D_1 和 D_2 是关于点 B_1 成中心对称的，因此可以得到 D_2 在摄像机坐标系下坐标为

$(f_c \frac{x_c^D}{z_c^D}, f_c \frac{y_c^D}{z_c^D}, f_c)$ ，假设摄像机图像在 X 和 Y 方向上像元尺寸为 (du, dv) ，单

位为 mm/pixel，且 B 点的像素坐标为 (u_{c0}, v_{c0}) ，那么可以得到点 D 在摄像机图像坐标系中的像素表示如公式 5-4:

$$\begin{cases} u_c = u_{c0} + f_c \frac{x_c^D}{z_c^D} / du \\ v_c = v_{c0} + f_c \frac{y_c^D}{z_c^D} / dv \end{cases} \quad \text{公式 5-4}$$

上述公式描述了摄像机镜头坐标系中一点 $D(X_c, Y_c, Z_c)$ 与其在摄像机图像坐标系中的像点 $D_2(u_c, v_c)$ 的对应关系，其中点 D 的坐标单位为 mm，点 D_2 的坐标单位为像素。

(2) 投影仪镜头和图像坐标系中点的坐标转换关系:

根据光路的可逆原理，投影仪可以看成是一个逆向的摄像机系统，假设投影仪的焦距为 f_p ，单位为 mm，投影仪光轴与投影仪焦平面的交点在投影仪成像面上坐标为 (u_{p0}, v_{p0}) 。根据公式可以得出类似的投影仪镜头坐标系与投影仪图像坐标系的对应关系如公式 5-5:

$$\begin{cases} u_p = u_{p0} + f_p \frac{x_p^D}{z_p^D} / du \\ v_p = v_{p0} + f_p \frac{y_p^D}{z_p^D} / dv \end{cases} \quad \text{公式 5-5}$$

这里的 (du, dv) 代表的是投影仪的像元尺寸。

5.5 投影-摄像系统三维重构原理

5.4 节详述了投影仪和摄像机的成像关系和投影仪坐标系、摄像机坐标系、世界坐标系之间的相互转换关系，接下来推导整个系统的三维重构公式，投影-摄像系统三维重构原理示意图如图 5.10 所示：

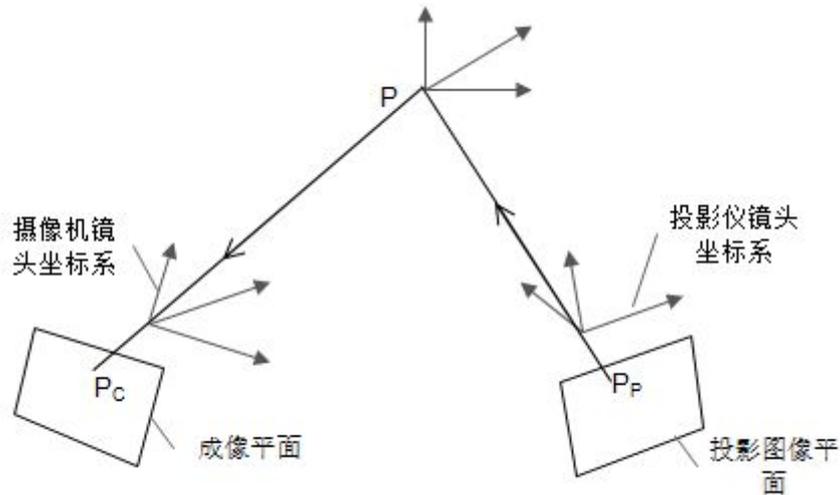


图 5.10 投影-摄像系统三维重构原理图

如图所示，为了描述问题方便，分别建立摄像机镜头坐标系、投影仪镜头坐标系和世界坐标系，空间中的任意点 P 作为一个反射点，在摄像机镜头坐标系 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 下的坐标为 $P_c(x_c^p, y_c^p, z_c^p)$ ，对应于摄像机成像坐标系下的坐标为 (u_c^p, v_c^p) 。 P_p 作为投影仪投射点，在投影仪镜头坐标系下的坐标为 $P_p(x_p^p, y_p^p, z_p^p)$ ，对应于投影仪成像坐标系下的坐标为 (u_p^p, v_p^p) 。

根据公式可知，任意点 P 在摄像机坐标系和投影仪坐标系下的坐标变换关系为：

$$\begin{bmatrix} x_p^p \\ y_p^p \\ z_p^p \end{bmatrix} = R_p \begin{bmatrix} x_c^p \\ y_c^p \\ z_c^p \end{bmatrix} + T_p = \begin{bmatrix} r_{p1} & r_{p2} & r_{p3} \\ r_{p4} & r_{p5} & r_{p6} \\ r_{p7} & r_{p8} & r_{p9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c^p \\ y_c^p \\ z_c^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{p1} \\ t_{p2} \\ t_{p3} \end{bmatrix} \quad \text{公式 5-6}$$

其中 R_p 代表了投影仪坐标系中的点关于摄像机坐标系的旋转矩阵， T_p 代表了投影仪坐标系中的点关于摄像机坐标系的平移向量。将公式 5-6 写成方程组形式可以表示为

$$\begin{cases} x_p^p = r_{p1}x_c^p + r_{p2}y_c^p + r_{p3}z_c^p + t_{p1} \\ y_p^p = r_{p4}x_c^p + r_{p5}y_c^p + r_{p6}z_c^p + t_{p2} \\ z_p^p = r_{p7}x_c^p + r_{p8}y_c^p + r_{p9}z_c^p + t_{p3} \end{cases} \quad \text{公式 5-7}$$

由之前介绍的小孔成像模型，根据公式所示的成像关系，可以得到点 P_c 和点 P_p 的对应成像关系式如下：

$$\begin{cases} u_c^p = u_{c0} + f_c \frac{x_c^p}{z_c^p} / du \\ v_c^p = v_{c0} + f_c \frac{y_c^p}{z_c^p} / dv \end{cases} \quad \text{公式 5-8}$$

$$\begin{cases} u_p^p = u_{p0} + f_p \frac{x_p^p}{z_p^p} / du \\ v_p^p = v_{p0} + f_p \frac{y_p^p}{z_p^p} / dv \end{cases} \quad \text{公式 5-9}$$

其中将公式 5-9 带入公式 5-7 中可得：

$$\begin{cases} z_p^p \frac{u_p^p - u_{p0}}{f_p / du} = r_{p1}z_c^p \frac{u_c^p - u_{c0}}{f_c / du} + r_{p2}z_c^p \frac{v_c^p - v_{c0}}{f_c / dv} + r_{p3}z_c^p + t_{p1} \\ z_p^p \frac{v_p^p - v_{p0}}{f_p / dv} = r_{p4}z_c^p \frac{u_c^p - u_{c0}}{f_c / du} + r_{p5}z_c^p \frac{v_c^p - v_{c0}}{f_c / dv} + r_{p6}z_c^p + t_{p2} \\ z_p^p = r_{p7}z_c^p \frac{u_c^p - u_{c0}}{f_c / du} + r_{p8}z_c^p \frac{v_c^p - v_{c0}}{f_c / dv} + r_{p9}z_c^p + t_{p3} \end{cases} \quad \text{公式 5-10}$$

联立公式（5-10）中第一个方程和第三个方程可以解得空间中的任意点 P 在摄像机坐标系下的 (y_c^p, z_c^p)

对于公式的理解：以上两个公式中， $f_c / du, f_c / dv, f_p / du, f_p / dv$ 四个表达式不能简单的看成焦距与像元尺寸相除的关系，应该当成一个整体，这几个数值可以当成重构系统已知的参数：投影仪关于摄像机的旋转矩阵 R_p 和平移向量 T_p ，以及摄像机和投影仪的光心位置 $(u_{c0}, v_{c0}), (u_{p0}, v_{p0})$ 也应当成重构系统已知的参数；

摄像机拍摄点图像坐标 (u_c^p, v_c^p) 和投影点图像坐标 (u_p^p, v_p^p) 是未知量。

经过上述步骤后，就可以计算出空间任意点 P 在摄像机坐标下的三维坐标 $P_c(x_c^p, y_c^p, z_c^p)$ 。根据公式 5-1 就可以得到摄像机坐标系关于世界坐标系的坐标变换关系：

$$\begin{bmatrix} x_w^p \\ y_w^p \\ z_w^p \end{bmatrix} = R_c^{-1} \begin{bmatrix} x_c^p \\ y_c^p \\ z_c^p \end{bmatrix} - T_c = \begin{bmatrix} r_{c1} & r_{c2} & r_{c3} \\ r_{c4} & r_{c5} & r_{c6} \\ r_{c7} & r_{c8} & r_{c9} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_c^p \\ y_c^p \\ z_c^p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_{c1} \\ t_{c2} \\ t_{c3} \end{bmatrix} \quad \text{公式 5-11}$$

其中， R_c ， T_c 分别代表了摄像机坐标系相对于世界坐标系的旋转矩阵和平移向量。通过公式 5-11 和空间任意点 P 在摄像机坐标下的三维坐标 $P_c(x_c^p, y_c^p, z_c^p)$ ，就可以计算点 P 在世界坐标系下的三维坐标 $P(x_w^p, y_w^p, z_w^p)$ 。

6.模型分析和检验

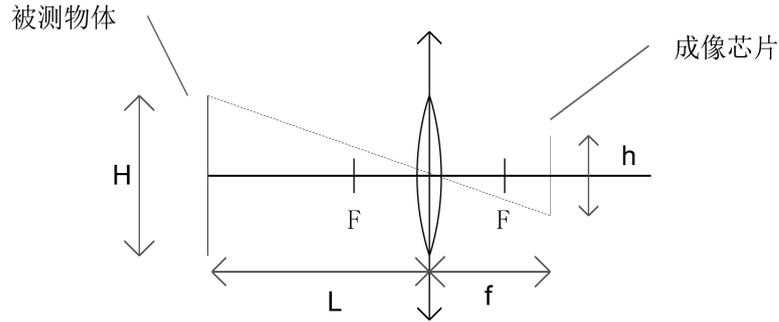
6.1 系统扫描速度分析

关于 3D 扫描系统的扫描速度，需要参考两个参数，一个是投影仪的图像刷新频率，另一个是摄像机采集图像的频率。投影仪每秒钟发射光的次数会小于其图像刷新频率，但是仅仅满足该条件是不够的，还要考虑图像刷新的频率要小于摄像机采集图像的频率，否则摄像机将不能捕捉到所有的反射光线。

本文假设投影仪的图像刷新频率为 80Hz，分辨率为 1366*768；摄像机的图像采集频率为 30fps。由于本文采用现结构光扫描法，分别进行纵向和横向现结构光扫描，总共刷新图像 $(1366+768)*0.61=1302$ 次，刷新频率为 $\min\{80, 15\}=30$ ，所以，扫描速度为： $1302/15=88$ 秒，在大众可接受范围之内。

6.2 系统扫描区域的尺寸分析

3D 扫描区域尺寸受投影仪图像芯片的尺寸、焦距，摄像机成像芯片尺寸、焦距，以及被测物体距离投影仪和摄像机的距离的影响。以摄像机为例，被测物体的高度为 H，距离镜头光心的距离为 L，焦距为 f，成像芯片的高度为 h，如图 6.1 所示。



可获得关系如下：

$$H = \frac{L \cdot h}{f} \quad \text{公式 5-12}$$

可知：摄像机的成像平面尺寸越大、焦距越小、距离被测物体的距离越远，则可采集到光线的区域越大；同理，投影仪图像尺寸越大、焦距越小、距离被测物体的距离越远，则投射的光线覆盖面积越大。但是，距离被测物体越远，成像的分辨率越低。

根据模型假设可知：

摄像机可采集区域最大为：

$$\text{长：} 500\text{mm} \cdot (0.25 \cdot 25.4) / 80 = 40.0\text{mm};$$

$$\text{高：} 500\text{mm} \cdot (0.19 \cdot 25.4) / 80 = 30.0\text{mm}.$$

投影仪可采集区域最大为：

$$\text{长：} 50\text{mm} \cdot (0.61 \cdot 25.4) / 18.5 = 41.9\text{mm};$$

$$\text{高：} 50\text{mm} \cdot (0.61 \cdot 25.4) / 18.5 = 41.9\text{mm}.$$

为了能够同时满足摄像机和投影仪的要求，可扫描区域的最大面积为：

$$\text{长：} \min\{40.0, 41.9\} = 40.0\text{mm};$$

$$\text{宽：} \min\{30.0, 41.9\} = 30.0\text{mm}.$$

6.3 系统分辨率分析

系统分辨率，是指系统在实现扫描功能时，通过扫描原件将扫描对象每英寸可以被表示成的点数，单位为 ppi。ppi 值越大，扫描的效果越好。一般来讲，分辨率的表示方式是用垂直分辨率和水平分辨率相乘表示。例如，某型号产品的分辨率标识为 500*800ppi，即表示它可以将扫描对象每平方英寸的内容表示为水平方向 500 点、垂直方向 800 点，共计 400000 点。

对于本系统而言，系统的分辨率主要受到以下三方面的影响和制约：1、摄像机和投影仪本身的分辨率；2、物体与投影仪之间的距离；3、三维重建过程的后期处理。

(1) 摄像机和投影仪本身的分辨率。

由于扫描的过程需要投影仪和摄像机的直接参与，所以投影仪和摄像机的固有分辨率直接决定了拍摄物体的精细程度。该分辨率越高，扫描物体越准确。因此，摄像机和投影仪的高分辨率对于需要高分辨率的表面重构十分重要。

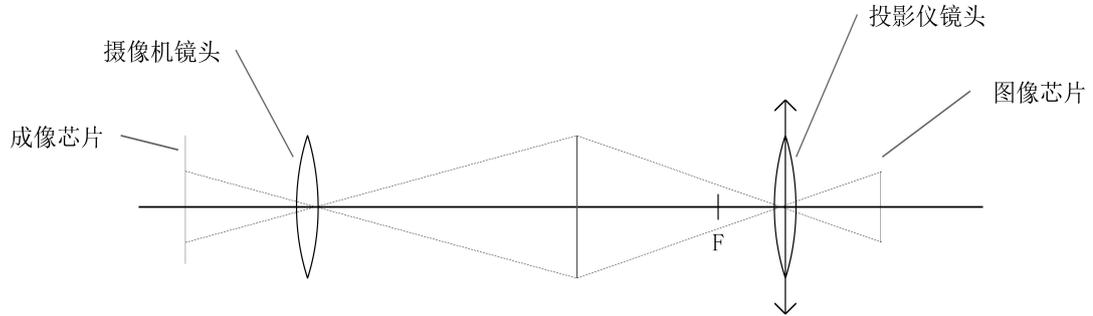
(2) 物体距离投影仪的远近

根据摄像机“近大远小”和投影仪“近小远大”的成像特点可以分析得，当投影仪距离被测物体越近时，则重构的三维物体表面分辨率越高。

(3) 三维重建过程的后期处理

在后期处理过程中，使用一种良好精确的算法，也能大大提高扫描物体的精确度。

以本文为例，仅考虑前两个影响因素，基本投影、成像原理如图 6.1 所示。



根据模型假设的内容和公式，投影仪投出的光线到达被测物体之后的分辨率为：

$$1366 / (41.9/25.4) = 828$$

$$768 / (41.9/25.4) = 466$$

828*466 分辨率的光线被摄像机采集之后的分辨率为：

$$828 / (80/500) = 5175;$$

$$466 / (80/500) = 2913。$$

摄像机最高能实现 1026*1026 的分辨率，所以，最终图像的分辨率为 1024*1024。

7.模型评价

本文利用日常生活中常见的投影仪、摄像机和电脑构建了简单的 3D 扫描系统。经过分析讨论我们认为该系统的优点如下：

- (1) 工具简便，实现起来比较容易；
- (2) 针对模型中涉及的五个空间平面分别建立坐标系，实现了不同坐标系中坐标点的转换；
- (3) 采用线结构光扫描的方法，简化了入射光和发射光信息的匹配工作，且匹配精度较高；
- (4) 利用光学的传播反射原理实现了被测物体表面信息的重构，公式相对简单易懂，计算精度较高。

同时，我们发现该系统存在一些缺点和待改进的地方：

- (1) 本系统只实现了对被测物体表面的部分区域的扫描，下一步工作是对整个被测物体表面进行扫描，并对扫描的信息进行整合以得到整个被测物体表面的三维图像信息；
- (2) 线结构光扫描法在速度上依旧不如面结构光法，且对于由被测物体表面干扰产生的阴影区域等无法做到识别。

8.参考文献

- [1] 唐佑辉,黄腾,邱伟,王成,姚涛. 关于测量中平面坐标系转换的研究[J]. 勘察科学技术,2014,05:15-18.
- [2] mengaim_cn. 摄像机标定. http://blog.csdn.net/mengaim_cn/article/details/323889. 2015年9月13日.
- [3] 许庶. 投影仪画面的自适应几何矫正[D]. 浙江大学,2013.
- [4] 郭龙强. 基于摄像机_投影仪系统的三维重构技术研究[D]. 大连理工大学. 2013.3-4.