



2015 湖南省研究生数学建模竞赛参赛承诺书

我们仔细阅读了湖南省研究生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权湖南省研究生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号是（从组委会提供的试题中选择一项填写）：

我们的参赛报名号为（如果组委会设置报名号的话）：

所属学校（请填写完整的全名）：

参赛队员（打印并签名）：1.

2.

3.

指导教师或指导教师组负责人(打印并签名)：

日期： 年 月 日

评阅编号（由组委会评阅前进行编号）：

2015 湖南省研究生数学建模竞赛

编号专用页

评阅编号（由组委会评阅前进行编号）：

评阅记录（可供评阅时使用）：

[illegible]

湖南省首届研究生数学建模竞赛

题 目

航空计划编排的优化模型

摘 要：

本文针对某航空公司的航班计划编排问题，分析了影响航线收益的主要因素，为了在满足飞机维修或延误的时间要求的条件下取得最大收益，建立最优化模型，利用图论算法，将优化模型转换为有向图分解问题进行求解，最后得到带有“鲁棒性”约束的最优航班计划。

在解决第 1 问的过程中，本文对附件 1 中提供的航空公司收入及成本相关参数进行计算，得出了该航空公司的收益情况。针对影响单条航线收益的各种因素如全票价格、飞行时间、维修费用等进行聚类分析，将 18 类原始因素归为距离、机型、客座率、折扣率、其他因素这 5 大类因素，并通过分析因素之间的关系验证这一聚类结果。而后，利用主成分分析的方法，得出这 5 大类因素对收益的贡献率，结合主成分分析的结果，提出利用可用主成分参数计算的综合收益系数评价航班的收益能力，利用该系数的计算公式分析了提高航线收益的方法并针对附件 1 中该公司 7 条亏损航线提出了整改的建议。

针对问题 2，考虑航线机型和班次约束、飞机利用率约束以及航程的空间连续性约束，以公司收益最大为目标建立整数规划模型。在模型求解时，将该航空公司的航线网络视为有向图，将问题转换为有向图分解问题进行求解，并提出基于受约束的最大路径搜索方法的有向图分解算法，通过求解得到该航空公司的所需两种机型的飞机最小数量（4 架 A320，4 架 E190）及其最优分配方案，最后根据每架飞机的航程时间连续性约束进行航班时刻编排，实现最优航班计划。

针对问题 3，考虑飞机维修需要，在不改变问题 2 中所求航班计划的情况下，我们建立对航线重新分配的优化模型，以寻求在航班计划约束前提下进行航线分配所需的最小飞机数量及备用飞机数量，最后求解得到在考虑维修需要的情况下，为保证航空公司的航班正常运营，需增加 2 架 A320 飞机和 1 架 E190 飞机。

针对问题 4，考虑航空计划的鲁棒性，在进行航班计划编排时设定一定的时间裕度，时间裕度越大，航班编排的鲁棒性越强，但是这会需求更多的飞机数量并降低公司的整体收益。为使得航空计划的鲁棒性和公司收益取得较好的折中，定义时间裕度代价函数，将航空计划的鲁棒性和公司收益统筹考虑，基于时间裕度代价最小准则，选取最佳时间裕度，该时间裕度下的航空计划即为带有“鲁棒性”约束的最优航班计划。最后，求解得到最佳时间裕度为 1.5 小时，在此时间裕度下，最优航班计划需要 A320 飞机 6 架，E190 飞机 5 架，该公司每月的总收益可以达到 4419.17 万元，达到公司原航空计划收益的两倍。

关键字： 航空计划编排，主成分分析，多目标规划，鲁棒性

1 问题的重述

1.1 问题的背景

随着我国经济快速稳定的发展和人民生活水平的提高,中国民用航空业高速发展,在国民经济建设中的地位也越来越重要。然而,对于航空公司运营而言,飞机运行的费用占据总营运成本相当大比例,因此如何有效运用机队资源是各家航空公司急需解决的问题。具体的说,就是在飞机排班过程中,既要符合民航总局相关飞行规定以及飞机排班诸多限制条件,又要考虑尽量减低成本,编排合理的航班计划以助于航班的安全运行、提高飞机的利用率和公司收益;同时,有效地降低运营及维护成本。

1.2 问题的提出

实际生活中,航空公司会在一定时间内对其拥有的航线、机型的收益情况进行市场分析,然后结合公司现有的生产资源情况(包括现有可飞航线、不同类型的飞机数量等)编排下一个月的航班计划。然而,实际中许多因素会影响航班计划以及航空公司的收益。因此,研究各个因素与航空公司经济效益之间的联系有助于公司合理安排航班计划并提高公司的经济效益。

1.3 待解决问题

根据题中某航空公司某月各航线单日运行成本及收入明细以及每个航线每日只安排一个班次的飞机的要求,建立模型解决以下问题:

1、利用附件 1 表中的数据,分析表中各因素对收益的影响,确立主要影响因素并根据建模结果提出改善意见。

2、在航线、平均客座率、平均折扣率不变,飞机可租赁和出租的情况下,根据需要变动航班时刻,制定一个月的航班计划使航空公司收益最大化。

3、考虑飞机维修问题,每架飞机累计飞行 130 小时后就需要停场维修 24 小时,维修地点设在西安和天津,在不改变问题 2 的航班计划以及保证公司正常运营的前提下,确定新增的两种机型各自的数量。

4、实际运行中,不可避免地受恶劣天气等不可控因素的影响,造成航班延误或取消,产生不正常航班成本。根据附件 2 中的数据,评价问题 2 中所求得的航班计划的“鲁棒性”,并重新制定一个带有“鲁棒性”约束的最优航班计划。

2 模型假设与符号说明

2.1 模型假设

- (1) 航空公司的航线是稳定的。
- (2) 飞机每天的最大飞行时间不超过 24 小时。
- (3) 飞机在某一周期内的航程形成闭合回路。

2.2 符号说明

I_t 为机票总收入, n_s 为座位数, p_{att} 为上座率, p_{dis} 为折扣率, P_{tic} 为机票价格, C 为总成本, c_{wage} 为工资成本, $c_{t\&l}$ 为起降成本, c_{food} 为餐食成本, c_{plane} 为机供品成本, c_{ins} 为保险成本, $c_{abnormal}$ 为不正常航班费用, $c_{consume}$ 为航材消耗费用, c_{repair} 为航材维修费用, c_{engine} 为发动机维修费用, Z_G 为收益综合评价价值, f_0 为固定收益, p_A 和 p_E 分别为 A320 飞机和 E190 飞机的租赁/出租价格, $g(t_m)$ 为时间裕度代价函数, $g_d(t_m)$ 和 $g_b(t_m)$ 分别为延误代价函数和效益损失代价函数。

3 问题分析

3.1 问题分析

针对问题 1, 需要对附件 1 中的数据进行航线收益分析, 找出影响收益的主要因素。虽然影响收益的因素很多, 但很多因素之间是相互关联的, 比如飞行时间就直接影响了机票价格和飞机油耗费用, 所以它们与飞行时间都呈近似线性关系, 所以可以对列表中的种种因素作聚类分析和主成分分析。首先, 将影响飞机收益的诸多因素进行聚类分析, 将其归为距离因素, 机型因素, 客座率因素, 折扣率因素以及其他因素几大类。然后, 可以基于主成分分析法, 找出影响收益的主要因素。最后, 可以对各条航线的综合效益进行评估, 并分析影响其效益的主要因素, 提出相应的整改措施。

针对问题 2, 在航线、平均客座率、平均折扣率不变的情况下, 需要调整航班时刻使得公司收益最大。航空公司的总收益实际上与航班时刻计划没有直接关系, 但我们可以通过优化航班时刻计划以及航线分配方案, 使得航空公司所需飞机数量最少, 从而使得航空公司的收益最大。因此, 可以利用优化理论, 对最优航班编排问题建立整数规划模型, 先得到完成所有航线任务所需的飞机数量及航线分配方案, 然后很据航班编排的时间连续性准则, 进行各条航线上的航班时刻编排。

针对问题 3, 需要在保证问题 2 所求航班计划不变的情况下, 考虑飞机维修需要, 为了保证航空计划的正常运营, 求解两种类型需要新增的飞机数量。设想如果所有飞机的维修日都不冲突, 即所有飞机都在不同的日期进行维修, 那么只需要增加一架备用飞机, 在某架飞机需要维修时, 安排备用飞机去完成该飞机在维修日的航线, 即可保证航班计划正常运营。因此, 可以通过调整各架飞机的航线安排, 使得各架飞机的维修日尽可能不冲突, 如果存在某天飞机维修数量不止一架, 需要增加的飞机数量就等于维修日冲突的最大飞机数量。

针对问题 4, 需要考虑航班计划的“鲁棒性”, 在航班计划编排时设定一定的时间裕度以便在出现某一航班延误时能够减少对后续航班的影响。航班编排时设

定的时间裕度越大，航班计划的鲁棒性就越好，但较大的时间裕度会导致飞机利用率下降，并需要较多数量的飞机才能完成该公司的航线任务，就会造成较大的飞机租赁费用，使得公司收益下降。因此，航班计划的鲁棒性和公司收益必须统筹考虑，指定的带有鲁棒性约束的最优航班计划应该在鲁棒性和公司收益之间达到较好的折中，在保证航班计划较好鲁棒性的前提下，使得公司收益最大。可以定义一个时间裕度代价函数，将航班计划的鲁棒性和公司收益综合考虑，然后以最小航班延误代价和最大公司收益为目标函数，建立带有“鲁棒性”约束的最优航班计划的多目标规划模型，通过模型求解得到最佳时间裕度以及该裕度下的最优航班计划。

3.2 理论基础

3.2.1 变量聚类

通常，人们可以凭经验和专业知识来实现分类。而聚类分析（cluster analyses）作为一种定量方法，将从数据分析的角度，给出一个更准确、细致的分类工具。

1) 变量相似性度量

在对变量进行聚类分析时，首先要确定变量的相似性度量，常用的变量相似性度量有两种。一种是相关系数，另一种是余弦夹角^[1]。

①相关系数

记变量 x_j 的取值 $(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}, \dots, x_{nj})^T \in R^n (j=1, 2, \dots, m)$ 。则可以用两变量 x_k 与 x_j 的样本相关系数作为它们的相似性度量：

$$r_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k)}{\left[\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 \sum_{i=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3-1)$$

在对变量进行聚类分析时，利用相关系数矩阵是最多的。

②夹角余弦

也可以直接利用两变量 x_k 与 x_j 的夹角余弦 r_{ij} 来定义它们的相似性度量，则有：

$$r_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij} x_{ik}}{\left[\sum_{i=1}^n (x_{ij})^2 \sum_{i=1}^n (x_{ik})^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3-2)$$

各种定义的相似度量均应具有以下两个性质：

a) $|r_{jk}| \leq 1$, 对于一切 j, k ;

b) $r_{jk} = r_{kj}$, 对于一切 j, k 。

$|r_{jk}|$ 越接近 1, x_k 与 x_j 越相关或越相似。 $|r_{jk}|$ 越接近零, x_k 与 x_j 的相似性越弱。本题中, 选用相关系数为相似度量。

2) 变量聚类法

类似于样本集合聚类分析中最常用的最短距离法、最长距离法等, 变量聚类法采用了与系统聚类法相同的思路 and 过程。在变量聚类问题中, 常用的有最大系数法、最小系数法等^{[1],[2]}。

①最大系数法

在最大系数法中, 定义两类变量的距离为: $R(G_1, G_2) = \max_{x_j \in G_1, x_k \in G_2} \{r_{jk}\}$ 这时,

$R(G_1, G_2)$ 等于两类中最相似的两变量间的相似性度量值。

②最小系数法

在最小系数法中, 定义两类变量的距离 $R(G_1, G_2) = \min_{x_j \in G_1, x_k \in G_2} \{r_{jk}\}$ 这时, $R(G_1, G_2)$

等于两类中相似性最小的两个变量间的相似性度量值。对于航班效益分析而言, 采取最小系数法更为合适。

3.2.2 图论基础

1) 图的基本概念^[1]

连通图: 如果一个无向图中, 任意两个顶点之间都是连通的, 则称该无向图为连通图。否则称为非连通图; 左图为一个连通图。

强连通图: 在一个有向图中, 对于任意两个顶点 U 和 V , 都存在一条从 U 到 V 的有向路径, 同时也存在着一条从 V 到 U 的有向路径, 则称该有向图为强连通图; 右图不是一个强连通图。

连通分支: 一个无向图的连通分支定义为该图的最大连通子图, 左图的连通分支是它本身。

强连通分支: 一个有向图的强连通分支定义为该图的最强的连通子图。

2) 图的存储结构

图的存储结构分为 3 种: 邻接表、边集数组以及邻接矩阵, 邻接表便于查找任一定点的关联边及关联点, 查找运算的时间复杂性平均为 $O(e/n)$; 边集数组存储稀疏图时, 空间效率比较直观, 不适合对定点的运算和对任意一条边的运算; 邻接矩阵直观方便, 适合处理 1 个定点的度和关联边。

4 模型的建立与求解

4.1 问题 1 的建模与求解

4.1.1 收益计算

$$I_t = (n_s \times p_{att} \times p_{dis} \times P_{tic}) \quad (4-1)$$

式子中 I_t 为机票总收入， n_s 为座位数， p_{att} 为上座率， p_{dis} 为折扣率， P_{tic} 为机票价格。

$$C = c_{wage} + c_{fuel} + c_{t\&l} + c_{food} + c_{plane} + c_{ins} + c_{abnormal} + c_{consume} + c_{repair} + c_{engine} \quad (4-2)$$

式子当中， C 为总成本， c_{wage} 为工资成本， $c_{t\&l}$ 为起降成本， c_{food} 为餐食成本， c_{plane} 为机供品成本， c_{ins} 为保险成本， $c_{abnormal}$ 为不正常航班费用， $c_{consume}$ 为航材消耗费用， c_{repair} 为航材维修费用， c_{engine} 为发动机维修费用。

毛收益的计算公式为：

$$I_G = I_t - C \quad (4-3)$$

根据附件 1 给出的数据及上述收益计算公式可以得到该航空公司一个月的收益情况：

表 4.1 该航空公司按附件 1 排班一个月的收益情况

序号	航线	收益	序号	航线	收益
1	西安-长沙-汕头	74736.83	27	天津-阜阳-厦门	-33768.11
2	汕头-长沙-西安	31724.92	28	厦门-阜阳-天津	-38841.59
3	西安-南充-三亚	111795.45	29	天津-杭州	13610.74
4	三亚-南充-西安	13235.77	30	杭州-天津	11209.81
5	西安-武汉-福州	24624.70	31	西安-重庆	57698.77
6	福州-武汉-西安	8312.27	32	重庆-西安	57578.43
7	天津-黄山-海口	26509.22	33	西安-呼和浩特	626.32
8	海口-黄山-天津	11914.53	34	呼和浩特-西安	-1510.96
9	西安-南京	42007.26	35	西安-昆明	30136.05
10	南京-西安	37230.32	36	昆明-西安	18913.92
11	西安-天津-沈阳	-5632.46	37	天津-成都	29921.06
12	沈阳-天津-西安	-27788.19	38	成都-天津	35027.55
13	天津-桂林	81962.93	39	天津-上海	5693.26
14	桂林-天津	81087.98	40	上海-天津	4174.16
15	西安-南昌-厦门	9482.82	41	西安-桂林	57073.33
16	厦门-南昌-西安	4341.13	42	桂林-西安	55393.73
17	天津-宁波	14816.74	43	三亚-贵阳-西安	66759.94
18	宁波-天津	10043.16	44	西安-贵阳-三亚	75211.93
19	天津-临沂-福州	-30110.34	45	天津-重庆	79708.89
20	福州-临沂-天津	-22920.04	46	重庆-天津	79179.72
21	天津-郑州-南宁	33093.30	47	天津-武汉-三亚	74749.57
22	南宁-郑州-天津	23165.12	48	三亚-武汉-天津	75360.43
23	天津-郑州-桂林	8015.33	49	天津-厦门	131030.19
24	桂林-郑州-天津	24801.45	50	厦门-天津	137216.36
25	温州-青岛-天津	16047.24	51	天津-三亚	32419.54

26	天津-青岛-温州	14950.18	52	三亚-天津	132689.77
机票总收入	5069430.03	总成本	3264719.61	毛收益	1804710.42

由上表可知，该公司共有 52 条航线，其中西安-天津-沈阳等 7 条航线处于亏损运营状态，其余利润均为正，该公司每天机票总收入达到 507 万元，在不考虑租用飞机的成本时，每天付出成本约 326 万元，每天毛收益达到 180 万元。

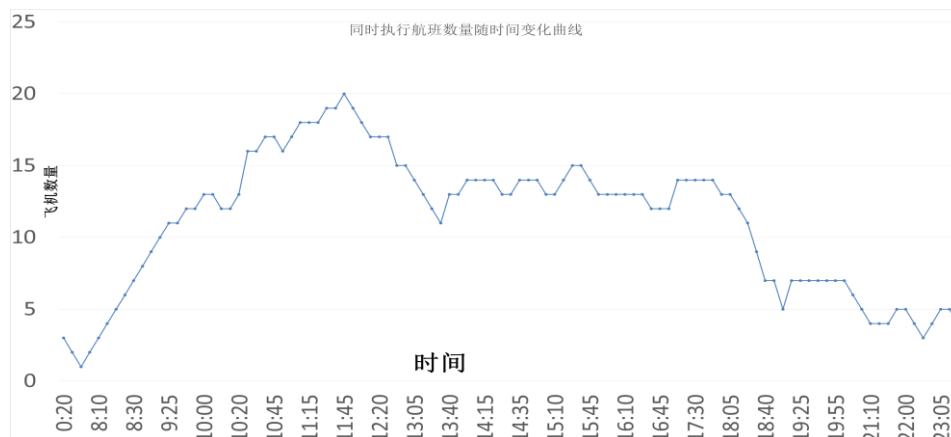


图 4.1 同时执行航班的飞机数量随时刻变化图

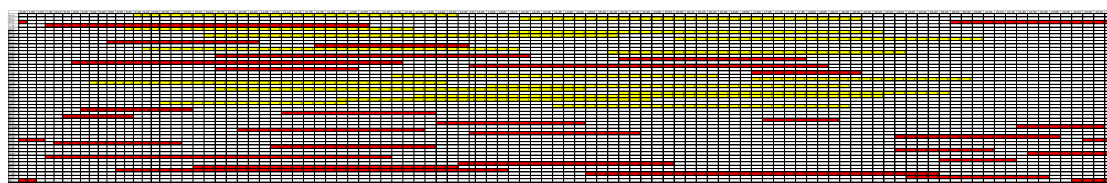


图 4.2 航班时刻图（红色表示 A320 在执行航线，黄色表示 E190 在执行航线）

将飞行时刻表进行图形化表示，不同列是一天之内按从小到大排列的起飞降落时刻，不同行是航线。再根据已经安排好的出发时刻进行优化编排，可以算出为了执行以上 52 条航线，至少需要 11 架 E190 飞机，12 架 A320 飞机，所以，该公司还需租赁 10 架 A320 飞机，7 架 E190 飞机，每月支付至少 505 万美元的租赁费用。（租金：A320，33 万美金/月架；E190，25 万美金/月架），根据 2015 年 9 月 13 日的美元人民币汇率 1:6.33735 可换算租金为 3,218.6 万元人民币（每天租金 107.28 万元人民币）。若每月按 30 天计算，该航空公司每月盈利 2,181.4 万元人民币。

4.1.2 影响单条航线收益的因素聚类分析

影响收益的因素有很多，从列表上看，飞行时间、机票折扣率、上座率、飞机型号及相应的座位数、餐食费用均可以看作影响最后收益的因素。但是，很多因素之间是相互关联的，比如就飞行时间直接影响了机票价格和飞机油耗费用，所以机票价格和飞机油耗费用与飞行时间都呈近似线性关系，所以还需要对列表中的种种因素作聚类分析和主成分分析。

首先进行数据准备：

a.表上列出的因子中，多数为价格和数量，但是起降时间单位均为时间，所以必须对时间单位进行转化，将时刻转化为以 24 小时为分母的小数形式表示。如 9:30 为 0.3958 天，23:30 为 0.9792 天，以此来表示时间的早晚。

b.不同型号的飞机座位数量不同，E190 飞机的座位数量是 106，A320 的座位数量为 180 个，油耗和其他性能均有差距，在想影响因素矩阵中，把飞行型号

进行数值化处理，A320 为 0，E190 为 1。

c.耗油量和燃料费用呈正比，故仅将燃料费用列入影响因素矩阵，耗油量也不列入影响因素。

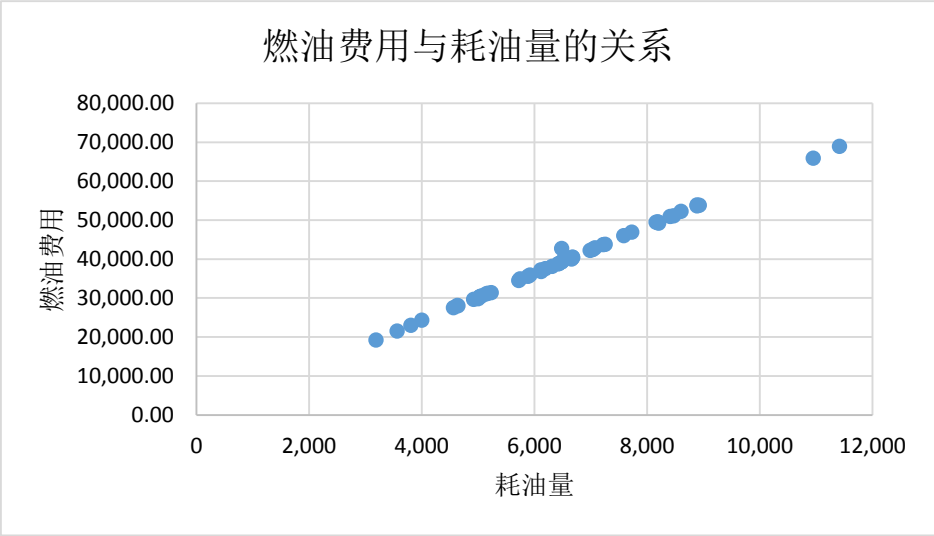


图 4.3 燃油费用与耗油量的关系

最终，将附件表格给出的诸多因素简化为 18 项因素，它们是{飞机机型，飞机座位数，全票价格，平均折扣率，起飞时间，降落时间，飞行小时，客座率，机组人员工资，航油费，起降和费非航空业务费，餐食，机供品，保险费，航材消耗费，不正常航班费，航材维修费，发动机维修费}，对该影响矩阵进行聚类分析即可找出影响收益的主要因素。

通过 3.2 章中变量聚类法，可以对 18 类影响因素聚类如下：

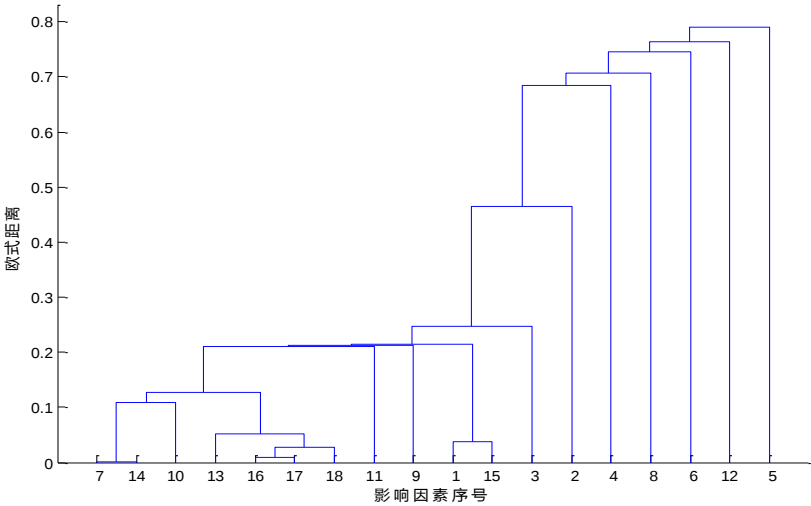


图 4.4 影响因素聚类结果

从聚类结果来看，欧式距离较近的因素有如下几组：飞行小时、燃油费用和保险费（7，10 和 14）；机供品、不正常航班费，航材维修费和发动机维修费（13,16,17 和 18）；机组人员工资，起降费用和非航空性支出（11,9）；航材消耗和机型（15 和 1）；全票价格和图 2 上其左边的所有因素相关。剩下比较独立的因素有飞机座位数（2），平均折扣率（4），客座率（8），餐食（12），起降时间（5 和 6）。所以总的而言，可以把影响收益的因素归为以下几类：

1) 距离因素:

包括飞行时间、燃油费用、保险费、不正常航班费、航材维修费、发动机维修费、机组人员工资、起降费用和非航空性支出、航材消耗费用以及全票价格。飞行距离与飞行时间正相关，以上均可视为距离造成的影响因素。

由图 4.5 可以看出，无论什么机型，其保险费用只和飞行时间呈正比的线性关系；从图 4.7，图 4.8 均可以看出燃油费用、不正常航班费用，维修费用等不仅和飞行时间成正比，也和机型相关联。

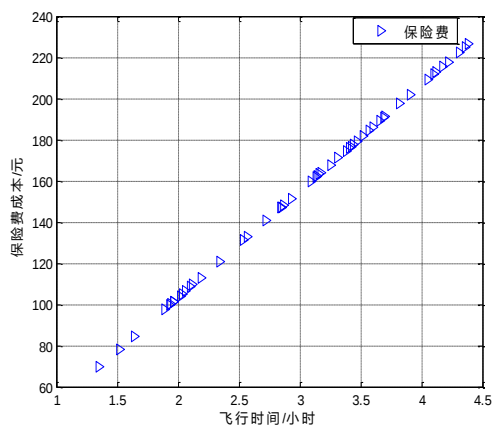


图 4.5

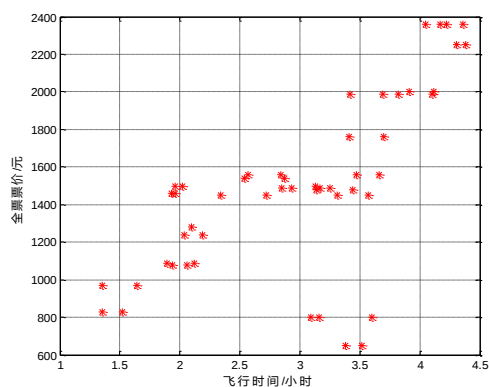


图 4.5

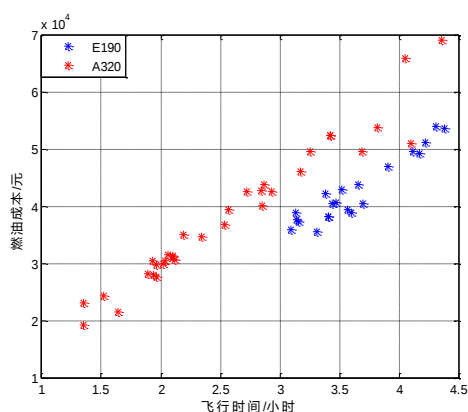


图 4.6

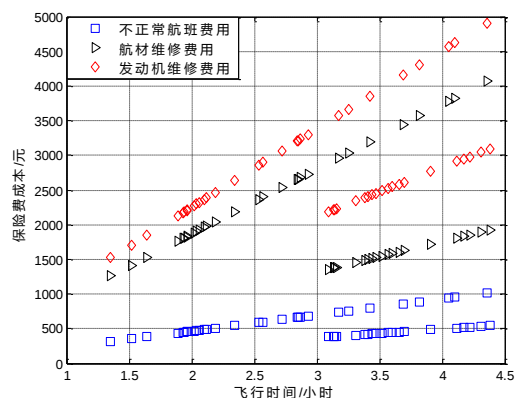


图 4.7

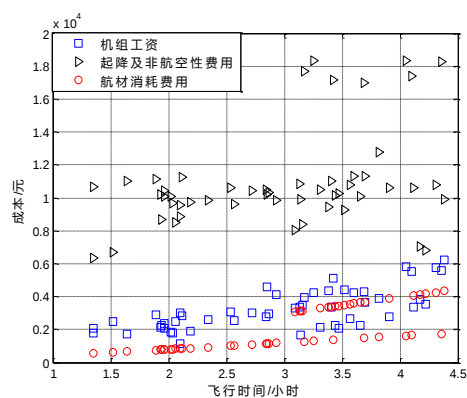


图 4.8

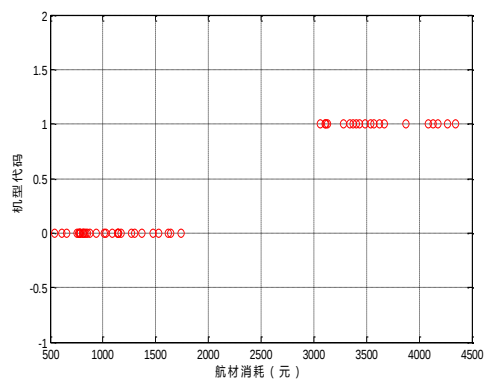


图 4.9

2) 机型因素

机型因素包括航班的机型和航材消耗，从图 10 可以看出，机型直接影

响了航材消耗成本的区间，对 A320（代码为 0）航材消耗均小于 2000 元，对于 E190（代号为 1）航材消耗均大于 3000 元，机型不同直接导致了航材消耗的不同。图 7，图 8 和图 9 中多个项目均处于两条斜率相似，但是初值不同的平行线上，这也说明机型部分导致了油耗、不正常航班费用、各项维修费用、机组工资费用的不同。

3) 客座率因素

从聚类图中可以看出，客座率因素与其他因素之间的欧式距离较远，在现实情况中，客座率与其他费用的关系也不大，应当视为一个独立的影响因素。

4) 折扣率因素

折扣率因素与客座率类似，应当视为独立性较强的一个影响因素。

5) 其他因素

其他因素包括餐食费用、起降时间，这些因素与其他因素之间的联系较小，且不明显，故概括为其他因素。

4.1.3 影响单条航线收益因素主成分分析

主成分分析的主要目的是希望用较少的变量去解释原来资料中的大部分变异，将许多相关性很高的变量转化成彼此相互独立或不相关的变量。通常是选出比原始变量个数少，能解释大部分资料中的变异的几个新变量，即所谓主成分，并用以解释资料的综合性指标。由此可见，主成分分析实际上是一种降维方法。对于本题中航空公司的收益影响因素，采用主成分分析可分析出影响收益的主要因素。

1) 航线收益主成分分析步骤

主成分分析法进行评价的步骤如下：

a. 对原始数据进行标准化处理

进行主成分分析的指标变量有 18 个： $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{18}$ ，共有 n 个评价对象，第 i 个评价对象的第 j 个指标的取值为 x_{ij} 。将各指标值 x_{ij} 转换成标准化指标 $\tilde{x}_{ij}$ 。

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}, (i = 1, 2, \dots, 52; j = 1, 2, \dots, 18) \quad (4-4)$$

其中 $\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$ ， $s_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$ ， $(j = 1, 2, \dots, m)$ ，即 $\bar{x}_j$ ， s_j 为第 j 个指标的

样本均值和样本标准差。对应地，称 $\tilde{x}_i = \frac{x_i - \bar{x}_i}{s_i}$ ， $(i = 1, 2, \dots, m)$ 为标准化指标变

量。

b. 计算相关系数矩阵 R

相关系数矩阵 $R = (r_{ij})_{m \times m}$ ，

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n \tilde{x}_{ki} \cdot \tilde{x}_{kj}}{n-1}, (i, j=1) \quad (4-5)$$

式中 $r_{ij}=1$, $r_{ij}=r_{ji}$, r_{ij} 是第 i 个指标与第 j 个指标的相关系数。

c. 计算特征值和特征向量

计算相关系数矩阵 R 的特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{18} \geq 0$, 及对应的特征向量, 其中 $u_1, u_2, \dots, u_m$, 其中 $u_j = (u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj})^T$, 由特征向量组成 m 个新的指标变量。

$$\begin{cases} y_1 = u_{11}\tilde{x}_1 + u_{21}\tilde{x}_2 + \dots + u_{n1}\tilde{x}_n \\ y_2 = u_{12}\tilde{x}_1 + u_{22}\tilde{x}_2 + \dots + u_{n2}\tilde{x}_n \\ \vdots \\ y_m = u_{1m}\tilde{x}_1 + u_{2m}\tilde{x}_2 + \dots + u_{nm}\tilde{x}_n \end{cases} \quad (4-6)$$

式中 y_1 是第 1 主成分, y_2 是第 2 主成分, ..., y_m 是第 m 主成分。

d. 选择 $p(p \leq m)$ 个主成分

计算特征值 $\lambda_j (j=1, 2, \dots, m)$ 的信息贡献率和累积贡献率。称为主成分

y_j 的贡献率 b_j :

$$b_j = \frac{\lambda_j}{\sum_{k=1}^m \lambda_k} (j=1, 2, \dots, m) \quad (4-7)$$

累计贡献率 α_p 的计算公式如下:

$$\alpha_p = \frac{\sum_{k=1}^p \lambda_k}{\sum_{k=1}^m \lambda_k} \quad (4-8)$$

当 α_p 接近于 1 时 ($\alpha_p = 0.85, 0.90, 0.95$), 可以选择前 p 个变量作为主成分, 代替原有的变量。

2) 航线收益主成分分析结果

航线收益的主成分分析结果如下:

表 4.2 航线收益的主成分分析

序号	特征值	贡献率(%)	累计贡献率(%)
1	7.37	40.92	40.92
2	4.73	26.30	67.23
3	1.69	9.39	76.61
4	1.11	6.15	82.76
5	0.89	4.95	87.71
6	0.69	3.81	91.52
7	0.53	2.96	94.48
8	0.46	2.57	97.04
9	0.25	1.41	98.46
10	0.19	1.04	99.50
11	0.06	0.34	99.83
12	0.02	0.12	99.96
13	0.01	0.04	100.00
14	0.00	0.00	100.00
15	0.00	0.00	100.00
16	0.00	0.00	100.00
17	0.00	0.00	100.00
18	0.00	0.00	100.00

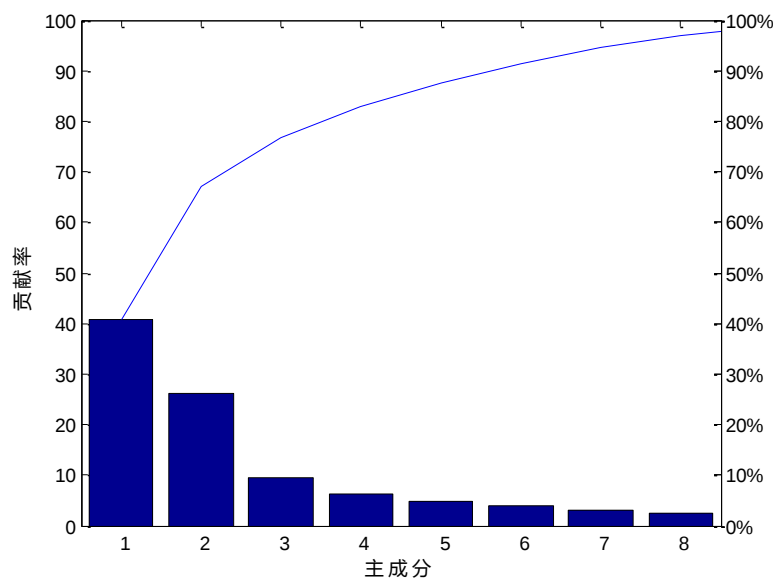


图 4.11 航线收益各主成分贡献率

由图和表均可以看出前 10 项成分的累计贡献率就达到了 99%，前 5 项的累计贡献率达到了接近 90%（87.71%），所以取主成分项数为 5。5 个主成分因子与原始的航班收益影响因子之间的转化系数 u_{ij} 如表 4.3：

由表可得出主成分因子与原始影响因子的计算公式：

$$\begin{cases} y_1 = 0.0101517x_1 + 0.01052x_2 + 0.28837x_3 + \cdots + 0.354883x_{18} \\ y_2 = 0.454303x_1 - 0.4543x_2 + 0.050868x_3 + \cdots - 0.10507x_{18} \\ \vdots \\ y_5 = -0.0485x_1 + 0.0485x_2 + 0.00227x_3 + \cdots - 0.00049x_{18} \end{cases} \quad (4-9)$$

由该表可以看出：主成分 1 表征的是距离因素，主要与原始影响因素中的飞行时间、全票价格、航油费、机组人员工资、保险费、不正常航班费用、航

材和发动机的维修费用，结合聚类分析的结果可以知道这些因素和飞行时间（或距离）都有明显的正相关关系。所以距离是影响单个航班收益的主要因素，其贡献率为 40.92%。

主成分 2 表征的是机型因素，其主要与原始影响因素中的机型、座位数和航材消耗三个量相关，机型和座位数、机型和航材消耗费用是很明显的一一对应关系，这也是可以从生活经验可以直接印证的。机型对航班收益的影响贡献率为 26.30%，这说明机型对收益的影响是很大的。

表 4.3 主成分因素与原始因素转换矩阵

原始因子	主成分	1	2	3	4	5
机型	1	0.010517	0.454303	0.002315	0.004015	-0.0485
飞机座位数	2	-0.01052	-0.4543	-0.00232	-0.00401	0.0485
全价票价格	3	0.288368	0.050868	-0.16096	0.145096	0.002278
平均折扣率	4	0.066964	0.151031	0.433998	0.310564	-0.16784
起飞时间	5	-0.01456	-0.08956	0.589468	0.169935	0.32215
降落时间	6	-0.08475	0.148388	0.159707	-0.35351	0.794078
飞行小时	7	0.295848	0.269503	0.010905	-0.02971	-0.02331
客座率	8	0.078518	-0.01233	-0.14893	0.827436	0.336036
机组人员工资	9	0.296571	0.056342	0.196662	-0.06905	0.009633
航油费	10	0.350599	0.098689	0.004394	-0.10532	0.070935
起降及非航空性业务费	11	0.269349	-0.16529	-0.07172	0.054965	0.095745
餐食	12	0.04641	0.072397	-0.58657	0.009918	0.321493
机供品	13	0.32597	-0.16566	0.031066	-0.10399	0.001694
保险费-旅客责任险	14	0.295955	0.269302	0.011089	-0.03025	-0.02366
航材消耗	15	0.100125	0.439763	-0.00319	0.011573	-0.03074
不正常航班费用	16	0.32505	-0.20589	0.022151	-0.06462	0.006703
航材维修费	17	0.300008	-0.25834	0.021805	-0.06391	0.010638
发动机维修费	18	0.354883	-0.10507	0.021802	-0.06306	-0.00049

主成分 3 表征的是折扣率因素，其主要与原始影响因素中的平均折扣率和餐食费用相关，贡献度达到了 9.39%。主成分 4 代表的是客座率因素，其主要与原始影响因素中的客座率相关，贡献度达到了 6.15%。主成分 5 则综合代表了起降时间和餐食、客座率因素，贡献度达到了 4.95%。

在得出影响航班收益的不同因素种类和其影响程度后，可以进行主成分估计，并借用主成分估计公式对提高单条航线的收益提出方案和建议。设收益综合评价值为 Z_G 。 Z_G 表征的是一条航线的收益能力，值越大，收益越高。 w_{ij} 表示第 j 条航线第 i 个主成分数据对标准化后的收益值的最小二乘回归方程系数。

$$Z_{Gj} = \omega_{1j}y_{1j} + \omega_{2j}y_{2j} + \omega_{3j}y_{3j} + \omega_{4j}y_{4j} + \omega_{5j}y_{5j} (j=1,2,\dots,52) \quad (4-10)$$

求解可得：

$$Z_G = 0.1414y_1 - 0.1527y_2 + 0.2179y_3 + 0.5295y_4 - 0.0366y_5 \quad (4-11)$$

把各航线的 7 个主成分值代入上式，可以得到部分航线收益水平的综合评价值以及排序结果如表 4.4。

表 4.4 部分航线收益水平的综合评价价值以及排序结果

航线序号	实际收益(元)	实际收益排名	收益综合评价价值	综合评价价值排名
50	137216.36	1	2.549	1
52	132689.77	2	1.884	3
49	131030.19	3	2.281	2
3	111795.45	4	1.484	4
13	81962.93	5	1.085	7
14	81087.98	6	1.010	9
45	79708.89	7	1.109	6
46	79179.72	8	1.140	5
48	75360.43	9	0.665	13
44	75211.93	10	1.010	10
47	74749.57	11	0.910	11
1	74736.83	12	1.080	8
43	66759.94	13	0.609	14
31	57698.77	14	0.590	15
32	57578.43	15	0.459	17
41	57073.33	16	0.722	12
42	55393.73	17	0.554	16
~	~	~	~	~
6	8312.27	40	-0.723	40
23	8015.33	41	-0.393	34
39	5693.26	42	-0.852	44
16	4341.13	43	-0.566	38
40	4174.16	44	-0.710	39
33	626.32	45	-1.201	48
34	-1510.96	46	-1.198	47
11	-5632.46	47	-1.447	50
20	-22920.04	48	-1.191	46
12	-27788.19	49	-1.235	49
19	-30110.34	50	-1.945	52
27	-33768.11	51	-0.919	45
28	-38841.59	52	-1.529	51

由上表可以看出，采用主成分估计的方法得出的航线收益综合评价价值排名和实际运营航线的综收益排名基本一致。虽然部分航线在实际收益和估计的综收益评价价值排名上有少许名次差距，但可以认为收益综合评价价值反映了航线收益能力的趋势。所以，从航线收益评价价值的计算公式上可以看出提高收益的策略和方法。

4.1.4 提高航线收益方法和建议

1) 综合收益评价价值分析

上节分析的综合收益评价价值计算公式如下：

$$Z_G = 0.1414y_1 - 0.1527y_2 + 0.2179y_3 + 0.5295y_4 - 0.0366y_5 \quad (4-12)$$

式中的 y_1 代表距离因素， y_2 代表机型因素， y_3 代表折扣率因素， y_4 代表客座率因素， y_5 代表餐食和起降时间等其他因素。

y_1 和 $x_3, x_7, x_9, x_{10}, \dots, x_{18}$ 等原始影响因素成正比关系，即和全票价格，燃油费、人员工资、维修费用等成正比。总的来说，飞行时间越长，机票价格越贵，工资油费维修等成本也会跟着增长。但是，对于该航空公司而言，航线是固定的，起点和终点固定，飞行时间也随之固定。所以通过增长或缩短航线并不现实。

y_2 代表机型因素，0 代表 A320，1 代表 E190。相比与 E190，A320 有更多的座位，更低的航材消耗。 Z_G 和 y_2 呈反比，即选用 A320 能获得更高的单个航班收益。

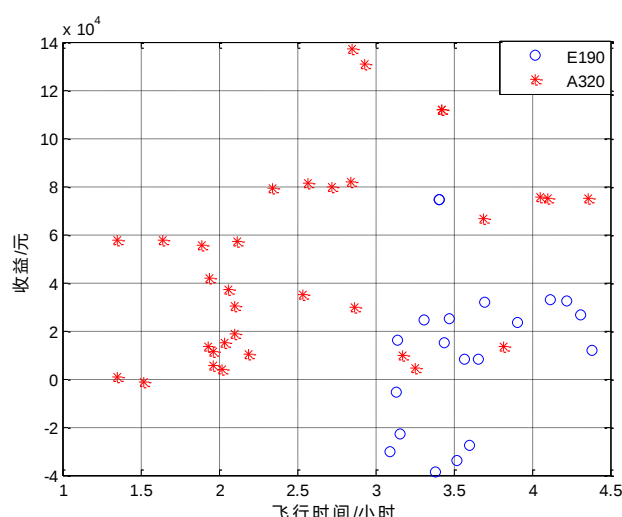


图 4.12 不同机型收益与飞行小时的关系

单独对 A320 和 E190 这两种机型的收益情况进行分析，其收益情况如表 4.5：

表 4.5 机型收益对比

机型	平均架次收益（不考虑租金）	平均架次收益（考虑租金）
A320	46899.0 元	25114.3 元
E190	15197.2 元	-3286.8 元

其中考虑租金的情况是按完成所有航线需要最少 11 架 E190 飞机，12 架 A320 飞机即租用 7 架 E190 飞机，10 架 A320 飞机的情况计算。若考虑租用飞机数量变化，A320 和 E190 的平均架次收益可用如下公式表示：

$$\bar{G}_{A320} = \frac{\sum_{i=1}^{32} G_{A320i}}{32} - \frac{n_{A320租} \times 330000 \times 6.33735}{30 \times 32} \quad (4-13)$$

$$\bar{G}_{E190} = \frac{\sum_{i=1}^{20} G_{E190i}}{20} - \frac{n_{E190租} \times 250000 \times 6.33735}{30 \times 20} \quad (4-14)$$

式子当中 G_{A320i} 表示第 i 次 A320 航线的收益， $\bar{G}_{A320}$ 表示总共 32 趟 A320 航线的平均收益， $n_{A320租}$ 是租赁的 A320 飞机数量，6.33735 是 2015 年 9 月 13 日的美元人民币汇率，除以 30 是因为每月按 30 天计算。E190 的平均架次收益计算方法与之类似。从公式可以看出，无论是 A320 还是 E190，在航线不变的情况下，租赁飞机架数越多，平均架次收益越少。

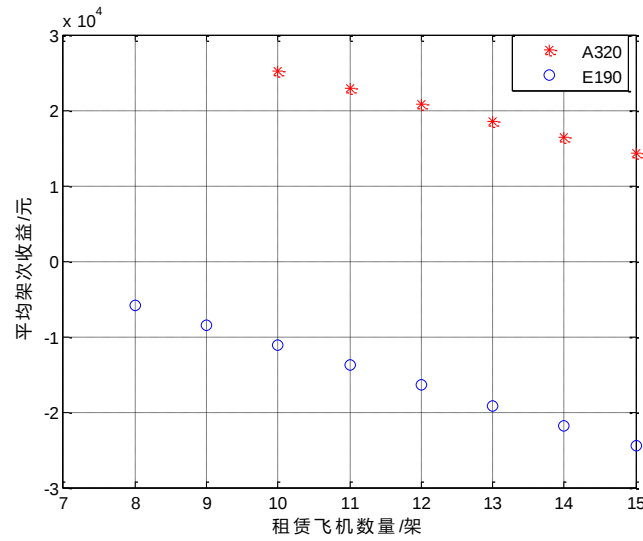


图 4.13 租赁飞机架数与平均收益的关系

y_3 代表折扣率因素，和平均折扣率正相关。 Z_G 和 y_3 呈正比，即折扣率越高，打折打得越少，航班收益越高。

y_4 代表客座率因素，和平均客座率正相关。 Z_G 和 y_4 呈正比，即客座率越高，乘客越多，航班收益越高。

y_5 代表起降时间和餐食等其他因素，影响程度较小， y_5 主要受到降落时间的影响， Z_G 和 y_5 是反比关系，所以，降落时间越晚， y_5 越大，收益综合评价越小。所以，单从第 5 个主成分与收益的关系来看，尽可能地减少晚间航班的数量，把夜间航班时间安排到日间，会增加收益。

2) 提高收益的具体建议

综合上述对收益影响因素的分析，可以得出以下几条建议：

- ① A320 的经济性优于 E190，如果需要租赁飞机，建议多用 A320 飞机代替 E190 飞机。
- ② 少打折，即增大折扣率，即能获得较高的机票收入。当然，现实条件下，可能因为打折少而减少乘客人数，需综合考虑。

- ③ 增加宣传手段，适当提高服务质量，以期增大客座率，增加机票收益。
- ④ 减少夜间航班，将夜航时间安排到白天，这样可以增加收益。
- ⑤ 在考虑租用飞机的基础上，考虑整个航空公司的整体收益，更需要关注的是航班的编排，将不同航线的时间错开，使得部分飞机可以一天执行多个航线。

对该航空公司而言，根据附件 1 可知该航空公司共有 7 条航线处于亏损状态。其部分指标参数如下：

表 4.6 亏损航线部分指标参数

航班号	航线全称	机型	耗油量(吨)	全价票价格	平均折扣率	起飞时间	终点降落时间	飞行小时	客座率(%)	机票收入(元)	成本(元)	收益(元)
XX1571	西安-天津-沈阳	E190	6,438	1,500.00	41.16%	9:45	14:15	3.134	84.11%	55045	60678	-5632
XX1572	沈阳-天津-西安	E190	6,423	800.00	48.66%	15:20	19:20	3.6	88.47%	36506	64294	-27788
XX1607	天津-临沂-福州	E190	5,921	800.00	46.20%	12:40	16:20	3.088	63.10%	24721	54831	-30110
XX1608	福州-临沂-天津	E190	6,115	800.00	57.39%	17:00	20:30	3.158	69.97%	34052	56972	-22920
XX1617	天津-阜阳-厦门	E190	7,078	650.00	57.39%	10:00	13:45	3.519	82.73%	32713	66481	-33768
XX1618	厦门-阜阳-天津	E190	6,988	650.00	46.20%	14:35	18:20	3.375	82.53%	26271	65112	-38842
XX1648	呼和浩特-西安	A320	4,002	830	41.71%	21:40	23:25	1.52	58.55%	36485	37996	-1511

从上表可以看出这些航班亏损的一些原因;首先，这些航班的折扣率都很低都在 60%以下，这对收益会造成很大的损失。其次，机票的价格也是造成亏损的主要因素：沈阳-天津西的航程与西安-天津-沈阳相同，油耗、飞行时间相差无几，但是票价却差了 700 元。从所有航线全票价格与飞行时间的关系上看：大部分亏损航线的票价均不在正常水平。此外，客座率也是造成亏损的原因之一，天津-临沂-福州、和呼和浩特-西安航线客座率都比较低，这会降低机票收入。

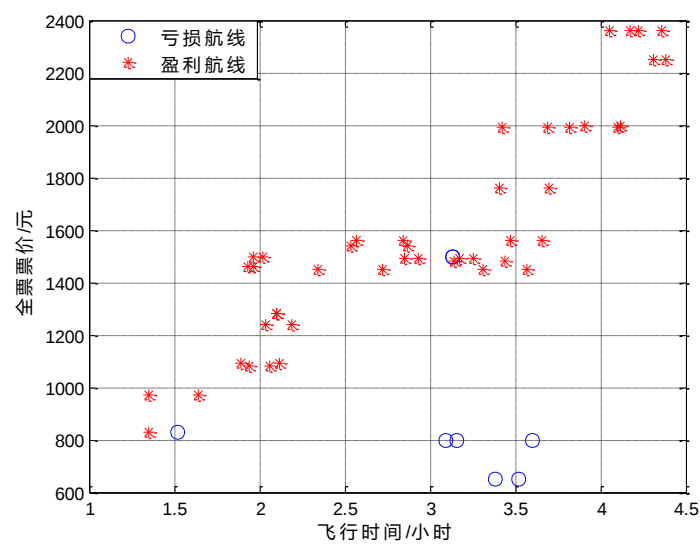


图 4.14 全票价格与飞行小时的关系

结合上述分析，提出对亏损航线的整改意见如下：

- 对于所有 7 条亏损航线增大折扣率，少打折。
- 对于**1572，**1607，**1608，**1617，**1618 这 5 条票价偏离正常水准的航线，提高票价。

3. 对于**1607, **1648 航线, 增大宣传和销售力度, 增大客座率。
4. 根据主成分分析结果, 提前抵达目的地的降落时间, 收益会提高, 因此, 对于**1648 航线, 可以适当提前起飞时间。

4.2 问题 2 的建模与求解

4.2.1 模型建立

航空公司的总收益等于收入减去成本, 我们将航空公司的收入分为固定收入和可变收入, 航空公司的总固定收入为每条航线上的固定收入的总和 (某航线的固定收入=全票价*平均客座率*平均折扣率), 可变收入为租赁或出租飞机的总费用或收入, 如果需要租赁飞机, 则可变收入为负, 反之, 如果可以出租飞机, 则可变收入为正。由于飞行航线和航空公司的营销能力是稳定的, 即航线、平均客座率、以及平均折扣率均不变, 因此航空公司的固定收入不变。我们通过对各航线的航班时刻重新规划 (各航线的飞行时间不变), 使得航空公司的总收益最大。

然而, 航空公司的总收益实际上与航班时刻计划没有直接关系, 但我们可以通过优化航班时刻计划, 使得航空公司所需飞机数量最少, 从而使得航空公司的收益最大。首先, 基于航空公司收益最大化准则, 建立优化模型, 得到航空公司收益最大化时所需的最小飞机数量, 以及各架飞机的航线分配方案, 然后, 根据各架飞机的航线分配方案制定航班时刻计划。

(1) 目标函数

假设航空公司的固定收入减去成本为固定收益 f_0 , 那么其总收益为固定收益和可变收入之和。因此, 我们可以得到总收益的计算公式为:

$$\begin{aligned} f &= f_0 + f_{\text{var}} \\ &= f_0 + p_A(2 - M) + p_E(2 - N) \end{aligned} \quad (4-15)$$

其中, p_A 和 p_E 分别为 A320 飞机和 E190 飞机的租赁/出租价格, M 为所需 A320 飞机数量, N 为所需 E190 飞机数量。

(2) 航线机型和班次约束

假设 A320 型飞机分别为 $A_1, A_2, \dots, A_M$, E190 型飞机分别为 $E_1, E_2, \dots, E_N$ 。两种机型在各航线上的分配情况分别用 x_{ij} 和 y_{ij} 表示, 则 $x_{ij}, y_{ij} \in [0, 1]$ 。 $x_{ij} = 1$ 表示将 A_i 飞机编排到第 j 条航线上, $y_{ij} = 1$ 表示将 E_i 飞机编排到第 j 条航线上。

a. 航线机型约束

根据该公司各航线的机型编排情况, 各航线上的机型编排已经确定为两种机型中的一种, 当航线 j 的机型编排为 A320 飞机时, 则 $y_{ij} = 0, i = 1, 2, \dots, M$;

当航线 j 的机型编排为 E190 飞机时, 则 $x_{ij} = 0, i = 1, 2, \dots, N$ 。

b. 航线班次约束

根据该航空公司的航班计划, 每个航线每日只安排一个班次的飞机, 因此可以得到航线班次的约束条件为:

$$\sum_{i=1}^M x_{ij} + \sum_{i=1}^N y_{ij} = 1, j=1, 2, \dots, L \quad (4-16)$$

其中 L 为航线总数。

(3) 飞机利用率约束

在实际情况下，同一架飞机在同一时刻只能在一条航线上飞行，因此在一天内每架飞机的运行总时间不可能大于 24 小时，即飞机利用率不可能大于 1。根据飞机利用率限制，可以得到其约束条件^{[3][4]}为：

$$\sum_{j=1}^L x_{ij} t_j \leq 24, i=1, 2, \dots, M \quad (4-17)$$

$$\sum_{j=1}^L y_{ij} t_j \leq 24, i=1, 2, \dots, N \quad (4-18)$$

其中 t_j 为飞机在第 j 条航线上的运行时间，包括飞行时间和停留时间。

(4) 航程的空间连续性约束

由于飞机运营成本很高，所以为了有效地降低运营及维护成本，航空计划编排时，在一个航空计划的周期内，航班去程的起始点和回程的终点相同，形成闭环飞行路线，当然来回程不一定对称。一个飞机的来回程在空间上连续的示意图如图 4.15 所示。

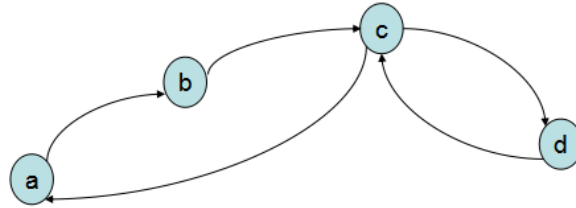


图 4.15 航程的空间连续性示意图

那么，为了保证每架飞机的飞行路线能够形成一个闭合曲线，这就要求每架飞机在某一城市降落和起飞的次数相同，于是，可以得到每架飞机航程的空间连续性约束条件如下：

$$\sum_{p \in a_j} x_{ip} = \sum_{q \in b_j} x_{iq}, i=1, 2, \dots, M \quad (4-19)$$

$$\sum_{p \in a_j} y_{ip} = \sum_{q \in b_j} y_{iq}, i=1, 2, \dots, N \quad (4-20)$$

其中 a_j 表示飞机在第 j 个城市起飞的航线标号集合， b_j 表示飞机在第 j 个城市降落的航线标号集合。

综上所述，航空计划编排的优化模型如下：

$$\begin{aligned}
\max f &= f_0 + p_A(2-M) + p_E(2-N) \\
s.t. &\left\{ \begin{array}{l}
M \in \mathbb{N}, N \in \mathbb{N} \\
x_{ij}, y_{ij} \in [0, 1] \\
x_{mj} y_{nj} = 0, j = 1, 2, \dots, L \\
\sum_{i=1}^M x_{ij} + \sum_{i=1}^N y_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, L \\
\sum_{j=1}^L x_{ij} t_j \leq 24, i = 1, 2, \dots, M \\
\sum_{j=1}^L y_{ij} t_j \leq 24, i = 1, 2, \dots, N \\
\sum_{p \in a_j} x_{ip} = \sum_{q \in b_j} x_{iq}, i = 1, 2, \dots, M \\
\sum_{p \in a_j} y_{ip} = \sum_{q \in b_j} y_{iq}, i = 1, 2, \dots, N
\end{array} \right. \quad (4-21)
\end{aligned}$$

4.2.2 模型的求解

由于各航线上的收入和成本不变，根据优化模型目标函数可以看出，收益最大化与飞机数量最小化是等价的。如果将航空网络视为一个有向图，各个城市为图的顶点，图中路径为两个城市对应航线，路径长度为飞机在该航线上的运行时间，该图所有顶点的入度等于出度^[4]，那么，我们的优化问题等价于用最少数量的飞机去遍历该有向图，每架飞机的遍历路线形成闭合回路，并且其路线总长度小于某一确定的值 $l_{\max}$ 。最后，优化模型求解可以归结为有向图分解问题，所求最小飞机数量即对应有向图分解的最小子图数量，模型的约束条件就对应子图的路径总长度小于 $l_{\max}$ ，以及子图为一个闭合有向图。我们提出的优化模型求解的有向图分解算法过程如下：

1. 任选有向图中的一个顶点，设置起点和终点都为此顶点，然后基于最长路径算法去搜索从起点到终点路径总长度小于 $l_{\max}$ 的最长路径，最后得到的闭合路径即为满足约束的子图；

2. 从有向图中去掉步骤 1 得到的子图路径，并去掉孤立的图中顶点，如果剩余图形成一个路径总长度小于 $l_{\max}$ 的闭合路径，则搜索结束，否则返回步骤 1；

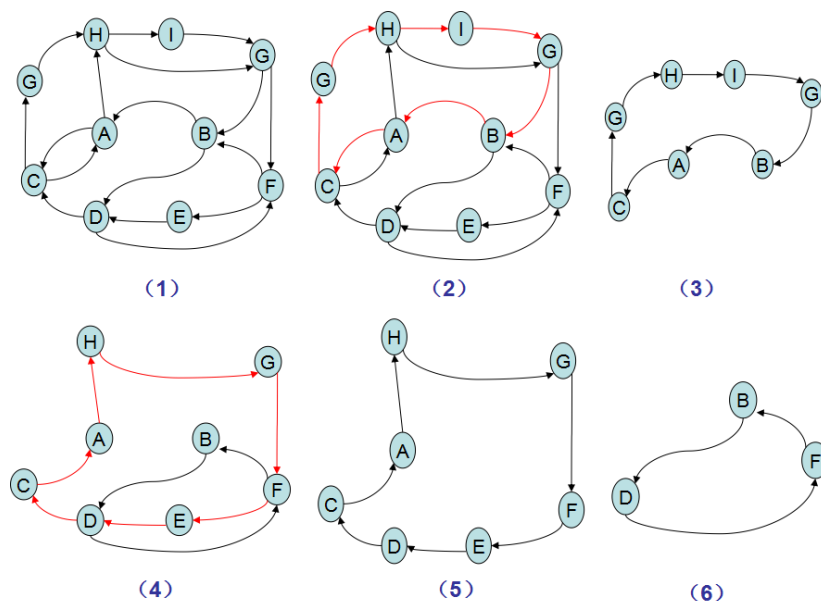


图 4.16 图分解算法示意图

图 4.16 中为我们提出的图分解过程示意图，(1) 为需要进行分解的有向图，我们首先在 (1) 中任选一个顶点，例如 A，设置搜索起始和终点均为 A，采用最大路径搜索算法寻找一条最长路径，并且该路径总长度不大于约束的最长路径长度，(2) 中红色线条标出的路径即为满足条件的路径，然后从 (2) 中减去图中的红色路径，得到如图中 (4) 所示的剩余图，接着在 (4) 继续搜索满足条件的路径并进行裁剪，前面的步骤一直对剩余图重复进行搜索裁剪，直到最后的剩余图的路径长度不大于约束的最长路径，如图中 (6) 即为不需再进行分解的剩余图。最后我们将原图分解为 (3) (5) (6) 三个子图，所有子图的路径长度不大于约束的最大路径长度，并且子图的个数最少。

另外，各条航线上对应的机型已经确定，并且两种机型对应航线的总收益相互独立，因此，在求解模型时，可以对两种机型对应航线组成的网络分别遍历，得到两种机型的最小飞机数量。我们画出的两种机型航线网络如下图所示，基于提出的有向图分解算法，通过求解即可得到两种类型飞机的数量以及航线分配计划。

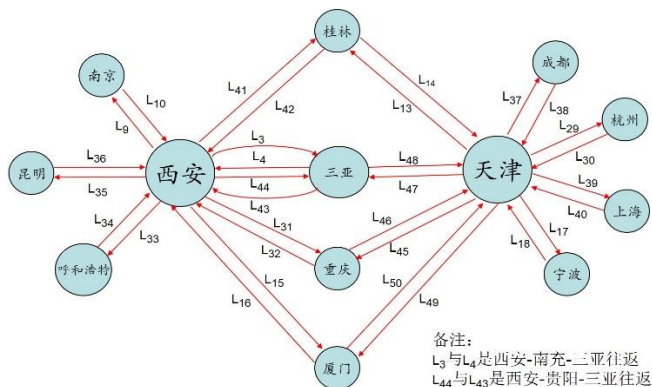


图 4.17 A320 型飞机航线网络

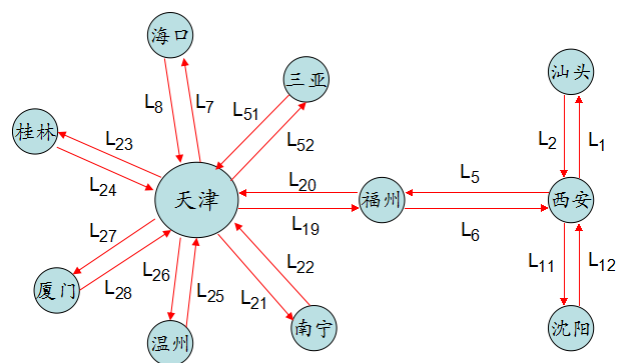


图 4.18 A320 型飞机航线网络

表 4.7 A320 飞机的航线分配

A320 飞机	航线分配	航班总次数 / 次	总飞行时间/h
1	$L_3 \rightarrow L_4 \rightarrow L_9 \rightarrow L_{10} \rightarrow L_{31} \rightarrow L_{32} \rightarrow L_{33} \rightarrow L_{34} \rightarrow L_{35} \rightarrow L_{36}$	10	21.301
2	$L_{17} \rightarrow L_{18} \rightarrow L_{29} \rightarrow L_{30} \rightarrow L_{37} \rightarrow L_{38} \rightarrow L_{39} \rightarrow L_{40} \rightarrow L_{45} \rightarrow L_{46}$	10	22.55
3	$L_{15} \rightarrow L_{16} \rightarrow L_{41} \rightarrow L_{42} \rightarrow L_{44} \rightarrow L_{43}$	6	18.218
4	$L_{13} \rightarrow L_{14} \rightarrow L_{47} \rightarrow L_{48} \rightarrow L_{49} \rightarrow L_{50}$	6	19.596

表 4.8 E190 飞机的航线分配

E190 飞机	航线分配	航班总次数/次	总飞行时间/h
1	$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_5 \rightarrow L_6 \rightarrow L_{11} \rightarrow L_{12}$	6	20.721
2	$L_7 \rightarrow L_8 \rightarrow L_{51} \rightarrow L_{52}$	4	17.078
3	$L_{21} \rightarrow L_{22} \rightarrow L_{23} \rightarrow L_{24} \rightarrow L_{27} \rightarrow L_{28}$	6	22.05
4	$L_{19} \rightarrow L_{20} \rightarrow L_{26} \rightarrow L_{25}$	4	12.822

根据优化模型求解得到的飞机数量以及各架飞机的航线分配,我们就可以编排出该公司各条航线上的航班时刻表,在航线时刻编排时,每条航线上的起飞降落时间间隔与附件中的原航空计划航班起飞降落时间间隔一致,最后我们编排的航班计划如附件所示。

4.3 问题 3 的建模与求解

如果考虑满足飞机维修需要,即每架飞机累计飞行 130 个小时就必须在维修基地停车场维修一次,每次停车场时间为 24 小时。那么,在不改变问题 2 中所求航班计划的情况下,要使航空公司正常营运,就需要新增加两种类型的飞机数量。

4.3.1 模型建立

在已经确定航班时刻的前提下,如果考虑飞机累计飞行 130 个小时就必须在维修基地停车场维修一次,且维修时间正好为 1 天,在维修日飞机必须停场,那么

为了完成公司的航空运营计划,就必须用备用飞机去代替维修飞机在维修日的航线。假设在一个月的第 i 天有 m_i ($i=1,2,\dots,30$) 架飞机需要维修, 如果所有飞机的维修日都不一样, 则 $m_i \leq 1$, 那么一个月的每一天最多只有一辆飞机停场, 这时航空公司就只需要增加一辆飞机作为备用飞机, 只要有飞机停场, 就安排备用飞机去完成该飞机在停场日的航线。如果飞机的维修日冲突, 如果维修日冲突的最大飞机数量为 $m_{\max} = \max \{m_1, m_2, \dots, m_{30}\}$, 那就需要新增飞机数量为 $m_{\max}$, 才能在最大冲突的维修日用备用飞机代替停场飞机航线, 保证航空计划的顺利运营。

假设飞机 i 每天飞行的总时间为 T_i , 该飞机需要在第 n_i 天到维修基地停场维修, 则 $n_i = \lceil 130 / T_i \rceil$ 。为了使得增加飞机数目尽可能少, 就应使得飞机维修的时间冲突尽可能小。在飞机航班时刻不做调整的情况下, 考虑飞机的维修需要, 可以在增加飞机数量后, 调整原来飞机的航线分配方案, 使得飞机维修时间没有冲突, 并且完成航班计划所需飞机数量最少。为了求解考虑维修需新增飞机的最小数量, 我们先求解考虑维修的情况下, 调整飞机航线分配达到最优航线分配, 保证航班计划正常运营的前提下所需飞机的最少数量。在最优航线分配方案下, 应保证所有飞机的维修日均不冲突, 这样备用飞机数量为 1 即可, 并且航空计划顺利运营的最少飞机数量即为航线分配的飞机数量和备用飞机数量之和。因此, 我们建模求解得到考虑飞机维修情况下, 保证航空计划正常运营的最少飞机数量, 然后减去不考虑飞机维修时的最少飞机数量, 即可得到需要增加的最少飞机数量。

(1) 维修时间不冲突约束

为了使得飞机的维修时间不发生冲突, 各个飞机的维修时间就需要至少相差一天, 于是得到飞机维修的不冲突约束条件如下:

$$\left\lceil \frac{130}{T_i} \right\rceil - \left\lceil \frac{130}{T_j} \right\rceil \geq 1, i \neq j, \text{ and } i, j = 1, 2, \dots, N \quad (4-22)$$

$$T_i = \sum_{j=1}^L x_{ij} t_j', i = 1, 2, \dots, N \quad (4-23)$$

其中 N 为飞机数量, t_j' 为飞机在第 j 条航线上的飞行时间。

(2) 航班时刻不冲突约束

为了保证航班计划的有效性, 同一飞机分配航线的航班时刻不能冲突, 将航班时刻不冲突约束条件表示如下:

$$[ts_i, te_i] \cap [ts_j, te_j] = \emptyset, \text{ and } x_{ki} = x_{kj} = 1, k = 1, 2, \dots, N \quad (4-24)$$

其中 ts_i 和 te_i 分别为第 i 条航线上的起飞和达到时刻, ts_j 和 te_j 分别为第 j 条航线上的起飞和达到时刻。只有当第 i 条航线和第 j 条航线分配同一架飞机时, 这两条航线的航班时刻才需满足不冲突条件, 否则不需要。

因此, 考虑飞机维修需要时, 航线重新分配的优化模型为:

$$\begin{aligned}
& \min N_p = N + 1 \\
& \left\{ \begin{array}{l}
N \in \mathbb{N} \\
x_{ij} \in [0, 1] \\
\sum_{i=1}^M x_{ij} = 1, j=1, 2, \dots, L \\
\sum_{j=1}^L x_{ij} t_j \leq 24, i=1, 2, \dots, N \\
\sum_{p \in a_j} x_{ip} = \sum_{q \in b_j} x_{iq}, i=1, 2, \dots, N \\
T_i = \sum_{j=1}^L x_{ij} t_j, i=1, 2, \dots, N \\
\left\lceil \frac{130}{T_i} \right\rceil - \left\lceil \frac{130}{T_j} \right\rceil \geq 1, i \neq j, \text{ and } i, j=1, 2, \dots, N \\
[ts_i, te_i] \cap [ts_j, te_j] = \emptyset, \text{ and } x_{ki} = x_{kj} = 1, k=1, 2, \dots, N
\end{array} \right. \quad (4-25)
\end{aligned}$$

4.3.2 模型求解

模型求解依然采用有向图分解算法，但与问题 2 中的算法步骤有所不同，该模型求解需要考虑维修时间冲突和航班时刻冲突条件。与问题 2 中模型求解过程不同的是，在最大路径搜索过程中，要使得路径上各航线时刻不冲突，并且路径总长度和已经得到子图的路径长度要有一定的长度差，该差值满足维修时间不冲突条件。

假设每天的航班时刻和每架飞机的飞行路线都固定不变，若已知每架飞机的飞行航线，就可以得到每架飞机每天的飞行总时间，且这个时间每天固定。根据每架飞机每天飞行的总时间，就可以计算得到该飞机的维修日。我们计算得到飞机每天飞行总时间及其对应的维修日如表 1 所示。

表 4.9 飞机每天飞行总时间对应的维修日

维修日/天	6	7	8	9	10
飞行时间/h	21.6~24	18.571~21.6	16.25~18.571	14.44~16.25	13~14.44
维修日/天	11	12	13	14	15
飞行时间/h	11.82~13	10.83~11.82	10~10.83	9.286~10	8.67~9.286

考虑飞机维修需要，我们根据模型求解算法，根据问题 2 中的航班时刻，对两种机型的航线重新进行优化分配，并计算所需最小飞机数量 N_p 。最后，我们计算得到 A320 飞机最少数量为 6，E190 飞机最少数量为 5。因此，考虑飞机维修需要，在不改变问题 2 中所求航班计划的情况下，要使航空公司正常营运，至少需要新增加 A320 飞机 2 架，E190 飞机 1 架。

我们将问题 2 中航线分配方案下各架飞机每天飞行的总时间与表 1 中的维修日进行对应发现，问题 2 中航线分配方案中的 E190 型飞机维修日均未冲突，因此该型号的飞机只需增加一辆就可完成考虑飞机维修情况下的航空计划；然而，A320 飞机的维修日存在冲突，第 1 架和第 4 架飞机的维修日均为第 7 天，于是我们根据问题 3 的模型对航线重新分配，看能否使得 4 架飞机的维

修日不冲突，并且能够完成所有航线的航空任务，但通过模型求解，最后得到维修日不冲突的前提下航线分配的最少飞机数量为 5，因此，考虑飞机维修的情况，A320 型飞机需新增数量为 2，才能保证航空计划的正常运营。

4.4 问题 4 的建模与求解

航班计划的“鲁棒性”是生产运行过程中需要考虑的一个重要因素，即设定一定的时间裕度以便在出现某一航班延误时能够减少对后续航班的影响。

在制定航班计划时，设定的时间裕度越大，航班计划的鲁棒性越好，但相应造成的公司总收益损失也会越大，因此，为了制定一个带有“鲁棒性”约束的最优航班计划，必须将鲁棒性和公司收益折中考虑，为了寻找一个较好的时间裕度，达到鲁棒性和公司收益较好的折中，我们定义时间裕度代价函数，将公司收益损失和航班的鲁棒性联系起来，最后制定的带有“鲁棒性”约束的最优航班计划，应使得时间裕度代价最小。对此，我们建立带有“鲁棒性”约束的最优航班计划的多目标规划模型，来解决该问题。

4.4.1 模型建立

定义时间裕度代价函数 $g(t_m)$ ，它为延误代价和效益损失代价的加权和。时间裕度代价综合考虑设定的时间裕度对公司效益和航班延误的影响。

$$g(t_m) = w_d g_d(t_m) + w_b g_b(t_m) \quad (4-26)$$

其中 w_d 和 w_b 分别为延误代价和效益损失代价的权值系数， $g_d(t_m)$ 和 $g_b(t_m)$ 分别为延误代价函数和效益损失代价函数。

泊松分布适用于描述单位时间（或空间）内随机时间发生的次数。我们可以假设航班的起飞和降落时间都服从泊松分布^[5]。根据概率论，如果一个序列服从泊松分布，那么它的序列间隔服从负指数分布。因此，我们用负指数分布函数来描述航班的延误时间。

$$f(t_d) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t_d}, & t_d \geq 0 \\ 0, & t_d < 0 \end{cases} \quad (4-27)$$

其中 t_d 为航班延误时间。

时间裕度的延误代价函数可以用航班延误时间大于时间裕度的概率函数来描述，随着设定的时间裕度增加呈递减趋势，那么延误代价函数表示如下：

$$\begin{aligned} g_d(t_m) &= k P(t_d \geq t_m) \\ &= k \int_{t_m}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt, t_m \geq 0 \end{aligned} \quad (4-28)$$

效益损失代价定义为设定的时间裕度下公司收益相比无时间裕度条件下公司收益减少的归一化值。时间裕度设定越大，航空公司所需的飞机数量将越多，公司的总收益将越少，因此，效益损失代价函数随着时间裕度的增加呈递增趋势。

考虑航班计划的鲁棒性，需要设定一定的时间裕度，我们建立带有“鲁棒性”

约束的最优航班计划的多目标规划模型：

$$\begin{aligned}
 & \min g(t_m) = w_d g_d(t_m) + w_b g_b(t_m) \\
 & \max f = f_0 + p_A(2-M) + p_E(2-N) \\
 & \left\{ \begin{array}{l}
 M \in N, N \in N \\
 x_{ij}, y_{ij} \in [0, 1] \\
 x_{mj} y_{nj} = 0, j = 1, 2, \dots, L \\
 \sum_{i=1}^M x_{ij} + \sum_{i=1}^N y_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, L \\
 \sum_{j=1}^L x_{ij}(t_j + t_m) \leq 24, i = 1, 2, \dots, M \\
 \sum_{j=1}^L y_{ij}(t_j + t_m) \leq 24, i = 1, 2, \dots, N \\
 \sum_{p \in a_j} x_{ip} = \sum_{q \in b_j} x_{iq}, i = 1, 2, \dots, M \\
 \sum_{p \in a_j} y_{ip} = \sum_{q \in b_j} y_{iq}, i = 1, 2, \dots, N
 \end{array} \right. \quad (4-29)
 \end{aligned}$$

在模型中， t_j 为飞机在第 j 条航线上的飞行时间， t_m 为设定的时间裕度。模型的目标函数为公司收益最大和航班延误代价函数最小，而公司收益最大又等价于所需飞机总数量最少。

4.4.2 模型求解

为了求解上述的多目标优化模型，我们将多目标转换为多步单目标优化问题进行求解。在模型求解时，我们首先设定不同的时间裕度，采用和问题 2 中相同的模型求解方法得到不同时间裕度下，航空公司效益最大化的最优航空计划，并得到公司的总收益。然后根据公司收益计算不同时间裕度下的效益损失，并将效益损失代价和延误代价加权求和，得到时间裕度代价。最后，根据计算得到的不同时间裕度下的时间裕度代价函数，选择使得时间裕度代价最小的最优时间裕度，此时间裕度下的航空计划即为带有“鲁棒性”约束的最优航班计划。

我们首先求解不同时间裕度下的公司收益，结果如表 2 所示，可以看出，随着时间裕度增大，两种机型的航线分配所需飞机数量都呈增长趋势，这使得航空公司必须以较高租赁资金去向专业的飞机租赁公司申请租赁，将花费很高的飞机租赁费用，导致公司的总收益下降。

表 4.10 不同时间裕度下的最少飞机数量和公司收益

时间裕度/h	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2
E190 最少数量	4	4	4	5	5	5	5
A320 最少数量	4	4	5	5	5	6	8
飞机最少总数量	8	8	9	10	10	11	13
租金（万元）	418.27	418.27	627.40	785.83	785.83	994.96	1413.23
总收益（万元）	4995.87	4995.87	4786.73	4628.30	4628.30	4419.17	4000.90
时间裕度/h	2.50	3.00	3.50	4.00	4	5	

E190 总架数	7	10	10	10	10	13	
A320 总架数	8	8	10	12	15	16	
飞机最少总数量	15	18	20	22	25	29	
租金（万元）	1730.10	2205.40	2623.66	3041.93	3669.33	4353.76	
总收益（万元）	3684.03	3208.73	2790.47	2372.20	1744.81	1060.37	

得到不同时间裕度下的公司总收益后，然后我们需要求解不同时间裕度下的时间裕度代价系数，它定义为公司收益损失代价和飞机延误代价的加权和，收益损失代价可以根据上面求解得到的公司收益损失情况得到，飞机延误代价可以和飞机延误时间概率联系，下面我们将根据航空公司飞机延误时间比例计算得到飞机延误代价。

根据附件 2 中的该航空公司航班延误统计表可以计算得出不同时间裕度（单位：小时）下对应的因航班延误造成的损失系数。但是仅有时间裕度为 0,0.25,1 三个裕度对应的数据，为了更加全面地获得不同延误时间对应航班延误的概率，我们从国家民航总局发布的《2014 年全国民航航班运行效率报告》^[6]获得更多关于航班延误概率的数据。

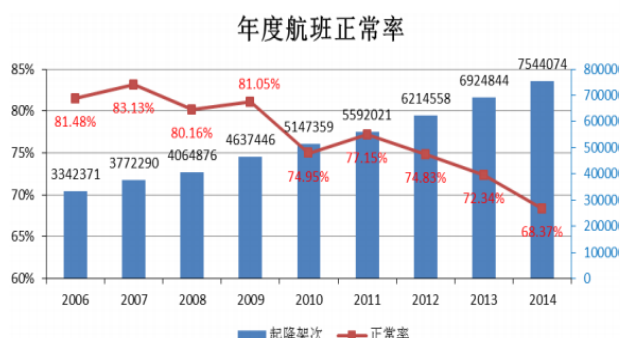


图 4.19 某公司年度航班正常率

2014 年航空公司航班延误时长分布

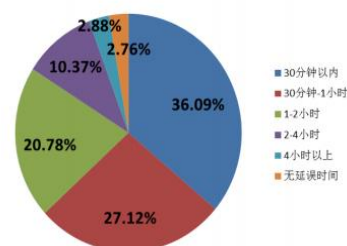


图 4.20 2014 年航班延误时长分布饼图

年度航班正常率反映了没有延误的航班占总航班的比例，从 2014 年的数据可以看出，年度航班正常率为 68.37%，也就是说有 31.62% 的航班均出现延误或其他不正常现象。

从 2014 年航班延误时长分布的饼图可以计算出各个延误时间段的航班占总延误航班数量的比例，假设该公司的延误水平与全国航空公司的平均延误水平相当，把各延误时间段航班数占总延误航班数的比例乘上 31.62% 的延误率即可以计算出各个时间段延误航班数占正常和不正常航班总数的比例，进而计算出延误时间分别为 0.5h,1h,2h,4h 分别对应的延误代价系数，计算结果如下：

表 4.11 不同时间裕度下的延误代价

时间裕度 (h)	0.5	1	2	4
延误代价	0.31	0.19	0.11	0.04

将由《2014 年全国民航航班运行效率报告》中数据计算得到的结果与根据附件 2 计算出的 3 个数据进行比较，可以发现两者趋势相近，分布在一条指数型曲线 $y = ae^{-bx} + c$ 的附近。

所以综合附件 2 计算所得数据和根据官方报告计算所得数据进行指数函数的曲线拟合，可以得到延误代价函数如下：

$$g_d(t_m)=0.9004e^{-3.205t_m}+0.0888 \tag{4-28}$$

其中 $g_d(t_m)$ 为延误代价， t_m 为时间裕度。

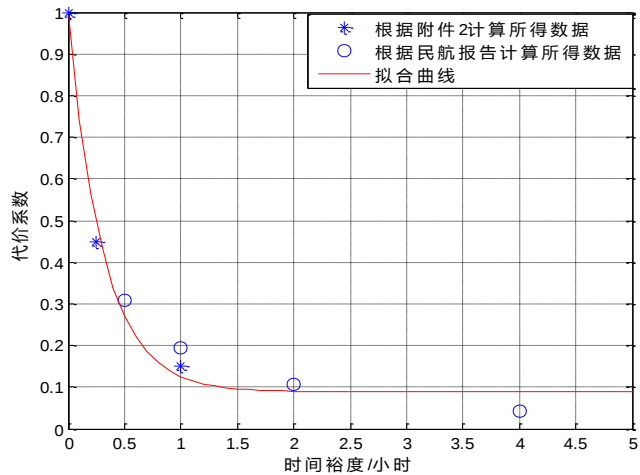


图 4.21 延误代价系数拟合曲线

由图 4.21 可以看出，该曲线拟合效果较好，拟合的残差平方和 SSE 为 0.0102，拟合系数 R 为 0.9843。所以选用该函数来估计时间裕度在 0h 到 5h 之间对应的损失系数。

在实际中，某一航班延误时会对后续航班造成连环影响，导致航空计划运行效率下降，服务质量低等诸多不良后果，因此，我们在对公司收益和航班延误统筹考虑时，更偏向于减小飞机延误代价，于是取收益代价权值为 0.3、延误代价权值为 0.7，将两者加权求和得到的时间裕度代价曲线如图 4.23 所示。根据时间裕度代价曲线，可以看出，时间裕度为 1.5h 时，代价曲线达到最小值，因此我们最终选取的最佳时间裕度取 1.5h。

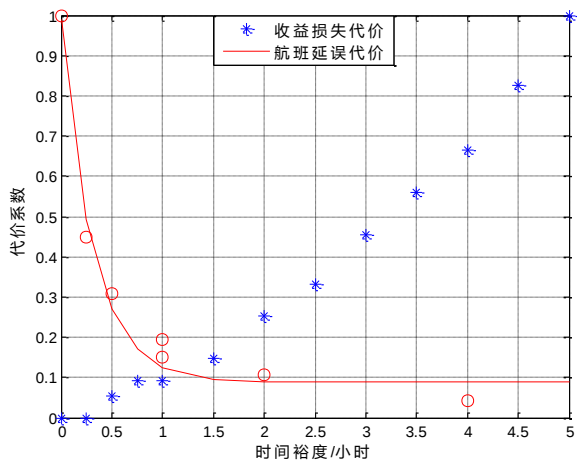


图 4.22 收益损失代价和航班延误代价曲线

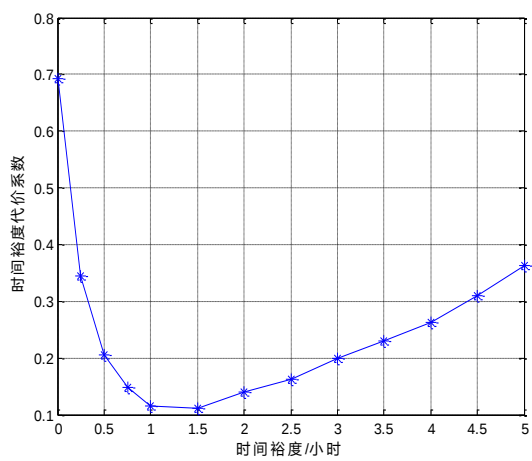


图 4.23 时间裕度代价系数曲线

当取最佳时间裕度为 1.5h 时，得到的最优航班计划需要 A320 飞机和 E190 飞机分别为 6 架和 5 架，各架飞机的最优航线分配方案如表 4.12 和 4.13 所示。

表 4.12 A320 飞机的航线分配

A320 飞机	航线分配	航班总次数/ 次	总飞行时间 /h
1	$L_{13} \rightarrow L_{14} \rightarrow L_{29} \rightarrow L_{30} \rightarrow L_{37} \rightarrow L_{38}$	6	14.708
2	$L_{17} \rightarrow L_{18} \rightarrow L_{39} \rightarrow L_{40} \rightarrow L_{49} \rightarrow L_{50}$	6	13.968
3	$L_{44} \rightarrow L_{48} \rightarrow L_{47} \rightarrow L_{43}$	4	16.2
4	$L_{15} \rightarrow L_{16} \rightarrow L_{31} \rightarrow L_{46} \rightarrow L_{45} \rightarrow L_{32}$	6	14.463
5	$L_3 \rightarrow L_4 \rightarrow L_{35} \rightarrow L_{36}$	4	11.446
6	$L_9 \rightarrow L_{10} \rightarrow L_{33} \rightarrow L_{34} \rightarrow L_{41} \rightarrow L_{42}$	6	10.88

表 4.13 E190 飞机的航线分配

E190 飞机	航线分配	航班总次数/ 次	总飞行时间 /h
1	$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_{11} \rightarrow L_{12}$	4	13.839
2	$L_5 \rightarrow L_{20} \rightarrow L_{19} \rightarrow L_6$	4	13.128
3	$L_{21} \rightarrow L_{22} \rightarrow L_{23} \rightarrow L_{24}$	4	15.156
4	$L_{26} \rightarrow L_{25} \rightarrow L_{27} \rightarrow L_{28}$	4	13.47
5	$L_7 \rightarrow L_8 \rightarrow L_{51} \rightarrow L_{52}$	4	17.078

根据模型求解得到的飞机数量以及各架飞机的航线分配,基于飞机航程编排时间的连续性规则,我们对各条航线上的航班时刻表进行编排,最后我们编排的带有“鲁棒性”约束的最优航班计划如附件所示。

针对某公司航班计划的合理编排问题,我们建立带有“鲁棒性”约束的最优航班计划的多目标优化模型,对航班计划的鲁棒性和公司收益进行统筹考虑,制定的航班计划达到这两者较好的折中,通过求解,得到最佳裕度时间设定 1.5 小时,最优航班计划总共需要飞机数量为 11 架,其中 A320 飞机 6 架, E190 飞机 5 架,因此该公司每月需要租赁 A320 飞机 4 架, E190 飞机 1 架,每月总共需花费租赁资金 994.96 万元,该航空公司每月的总收益可以达到 4419.17 万元。

根据附件中给出的该公司的原航空计划,基于飞机数量最少准则进行最优航线分配后,为了每天完成该公司的 52 条航班任务,该公司总共需要 23 架飞机,其中 A320 飞机 12 架, E190 飞机 11 架,因此,还需租赁 10 架 A320 飞机, 7 架 E190 飞机,每月需要支付租赁费用 3218.6 万元,该航空公司每月收益为 2181.4 万元。

比较我们制定的带有“鲁棒性”约束的最优航班计划和附件中给出的原航空计划。可以看出,我们制定的航班计划在保证航线任务顺利完成的前提下,可以使得航空公司所需飞机数量减少 12 架,这位航空公司节省了 2223 万元的飞机租赁资金,有效地降低运营及维护成本,显著提高了公司的经济效益。我们制定的航空计划使得航空公司每月总收益比原航空计划高 2237.77 万元,达到原航空计划总收益的两倍。另外,我们制定的航空计划,在航班时刻编排时设定了 1.5 小时的时间裕度,调研 2014 年航班延误时长分布,我们发现飞机延误时间超过 1.5 小时的比例仅有 5%,所以,我们设定的时间裕度最少为 1.5 小时,可以较好地保证航班计划的运行效率,因此,我们制定的带有“鲁棒性”约束的最优航班计划也具有较好的鲁棒性。

5 总结

一个合理的航班计划应该既有助于航班的安全运行，又能提高飞机的利用率，还可以有效地降低运营及维护成本，提高公司的经济效益。根据某航空公司现有的航线资源，我们对其航空计划的编排问题建立优化模型，并利用图论相关算法进行模型求解，制定了一个鲁棒性较好的航空计划。

对于第 1 个问题，本文对附件 1 中提供了的航空公司收入及成本相关参数进行计算，得出了该航空公司的收益情况。对影响单条航线收益的各种因素如全票价格、飞行时间、维修费用等进行聚类分析，将 18 类原始因素归为距离、机型、客座率、折扣率、其他因素这 5 大类因素，并通过分析各影响因素之间的关系验证这一聚类结果。而后，利用主成分分析的方法，得出这 5 大类因素对收益的贡献率，其中最主要的是距离因素（贡献率 40.92%），机型因素（贡献率 26.30%），而后是折扣率和客座率。结合主成分分析的结果，提出利用可用主成分参数计算的綜合收益系数评价航班的收益能力，从该系数的计算公式出发，分析了提高航线收益的方法：1) A320 的经济性优于 E190，如果需要租赁飞机，建议多用 A320 飞机代替 E190 飞机。2) 增大折扣率，即能获得较高的机票收入。3) 增加宣传手段，适当提高服务质量，以期增大客座率，增加机票收益。4) 减少夜间航班，将夜航时间安排到白天，这样可以增加收益。5) 在考虑租用飞机的基础上，考虑整个航空公司的整体收益，更需要关注的是航班的编排，将不同航线的時間错开，使得部分飞机可以一天执行多个航线并针对附件 1 中该公司 7 条亏损航线提出了整改的建议。最后针对附件 1 中该公司 7 条亏损航线提出了具体的整改的建议。

对于问题 2，在飞行航线和航空公司的营销能力是稳定的情况下，考虑航线机型和班次约束、飞机利用率约束以及航程的空间连续性约束，以公司收益最大为目标建立整数规划模型。在模型求解时，可将该航空公司的航线网络视为有向图，将问题转换为有向图分解问题，创新性地提出基于受约束的最大路径搜索方法的有向图分解算法，不仅减少了求解的难度还提高了求解效率。通过模型求解，得到所有航线的分配方案以及所需的最少飞机数量，其中 A320 飞机需要四架，每架飞机每天飞行总时间分别是 21.301h、22.55h、18.218h 和 19.596h；E190 飞机需要四架，每架飞机每天飞行总时间分别是 20.721h、17.078h、22.05h 和 12.822h。

对于问题 3，因为在所有飞机的维修日都不冲突的情况下，即所有飞机都在不同的日期进行维修，那么只需要增加一架备用飞机，即可保证航班计划正常运营。于是我们将问题进行转化，通过调整飞机航线分配，使得飞机维修日不冲突，并且保证航班计划正常运营的前提下，求解所需飞机的最少数量，然后减去不考虑飞机维修时的最少飞机数量，即可得到需要增加的最少飞机数量。通过建模求解，得到至少需要新增加 A320 飞机 2 架，E190 飞机 1 架。

对于问题 4，航班编排时设定的时间裕度越大，航班计划的鲁棒性越好，但相应地所需飞机数更多，会造成公司总收益减少。统筹考虑公司收益与其鲁棒性的关系，建立延误代价最小和公司收益最大的多目标优化模型，定义时间裕度代价函数（它是延误代价和效益损失代价的加权和），基于时间裕度代价最小准则，选取最佳时间裕度，该时间裕度下的航空计划即为带有“鲁棒性”约束的最优航班计划。最后，我们得到最佳裕度设定为 1.5 小时，在此时间裕度下，最优航班计划总共需要飞机数量为 11 架，其中 A320 飞机 6 架，E190 飞机 5 架，该公司每

月的总收益可以达到 4419.17 万元。我们制定的航空计划使得航空公司每月总收益比原航空计划高 2237.77 万元，达到原航空计划总收益的两倍。另外，2014 年航班延误时长分布的调研结果表明飞机延误时间超过 1.5 小时的比例仅有 5%，我们求解得到的最佳时间裕度，可以较好地保证航班计划的运行效率，具有较高的鲁棒性。

6 参考文献

- [1].吴孟达,成礼智,数学建模教程,长沙:高等教育出版社, 2011.
- [2].王学仁,王松桂,实用多元统计分析,上海:上海科学技术出版社,1990.
- [3].张伯生,刘飞,实现航班计划优化的动态规划模型, 上海工程技术大学学报, 18(2),2004:135-140.
- [4].孙宏,杜文,航空公司飞机排班问题的排序模型及算法,系统工程理论方法应用,11(3),2002,244-247
- [5]李耀华,谭娜,郝贵和,飞机排班航班串编制模型及算法研究,系统仿真学,20(3),2008,612-615
- [6].中国 国家民航总局 《2014 年全国民航航班运行效率报告》
<http://www.caac.gov.cn/I1/K3/201507/P020150710519617340682.pdf>),2015.9.15.19:00

7 附录

1. 问题 2 优化所得航线排班表

航班号	航线全称	机型	起飞时间	降落时间	起飞时间	降落时间
XX1405	西安-长沙-汕头	E190	0:00	1:45	2:10	3:30
XX1406	汕头-长沙-西安	E190	4:00	5:35	6:00	7:50
XX1437	西安-南充-三亚	A320	0:10	1:25	1:40	4:00
XX1438	三亚-南充-西安	A320	4:25	6:50	7:05	8:10
XX1439	西安-武汉-福州	E190	8:20	9:35	10:00	11:20
XX1440	福州-武汉-西安	E190	12:00	13:35	13:50	15:30
XX1459	天津-黄山-海口	E190	5:00	6:45	7:20	9:50
XX1460	海口-黄山-天津	E190	10:20	12:20	13:00	15:00
XX1533	西安-南京	A320	8:30	10:25		
XX1534	南京-西安	A320	10:45	12:45		
XX1571	西安-天津-沈阳	E190	15:50	17:45	18:10	19:35
XX1572	沈阳-天津-西安	E190	20:00	21:25	21:50	23:45
XX1583	天津-桂林	A320	2:00	5:55		
XX1584	桂林-天津	A320	6:10	8:25		
XX1599	西安-南昌-厦门	A320	2:00	4:00	4:20	5:50
XX1600	厦门-南昌-西安	A320	6:10	7:40	8:00	9:55
XX1603	天津-宁波	A320	0:00	1:30		
XX1604	宁波-天津	A320	1:50	3:45		
XX1607	天津-临沂-福州	E190	9:00	10:00	9:40	11:30
XX1608	福州-临沂-天津	E190	12:00	13:50	14:20	15:20
XX1609	天津-郑州-南宁	E190	0:10	1:30	1:50	4:20
XX1610	南宁-郑州-天津	E190	4:30	6:55	7:05	8:25
XX1611	天津-郑州-桂林	E190	8:40	10:10	10:20	12:25
XX1612	桂林-郑州-天津	E190	12:35	14:40	14:50	16:15
XX1614	温州-青岛-天津	E190	20:00	21:50	22:20	23:20
XX1615	天津-青岛-温州	E190	16:00	17:05	17:30	19:35
XX1617	天津-阜阳-厦门	E190	16:30	17:45	18:00	19:40
XX1618	厦门-阜阳-天津	E190	20:00	21:40	22:00	23:20
XX1627	天津-杭州	A320	4:00	5:45		
XX1628	杭州-天津	A320	6:05	8:00		
XX1645	西安-重庆	A320	13:00	14:10		
XX1646	重庆-西安	A320	14:30	15:35		
XX1647	西安-呼和浩特	A320	15:50	17:25		
XX1648	呼和浩特-西安	A320	18:40	19:25		
XX1649	西安-昆明	A320	19:35	21:45		
XX1650	昆明-西安	A320	21:55	23:55		
XX1657	天津-成都	A320	8:30	11:15		

XX1658	成都-天津	A320	11:40	14:00		
XX1661	天津-上海	A320	14:25	16:20		
XX1662	上海-天津	A320	16:50	18:50		
XX1663	西安-桂林	A320	10:20	12:05		
XX1664	桂林-西安	A320	12:35	14:20		
XX1668	三亚-贵阳-西安	A320	19:00	21:00	21:25	23:10
XX1667	西安-贵阳-三亚	A320	14:40	16:30	16:45	18:40
XX1669	天津-重庆	A320	19:10	21:55		
XX1670	重庆-天津	A320	22:05	23:55		
XX1681	天津-武汉-三亚	A320	8:50	10:35	11:00	13:20
XX1682	三亚-武汉-天津	A320	13:40	15:50	16:10	17:50
XX1689	天津-厦门	A320	18:15	20:50		
XX1690	厦门-天津	A320	21:20	22:45		
XX1691	天津-三亚	E190	15:20	19:20		
XX1692	三亚-天津	E190	20:00	23:20		

2. 问题 4 优化所得航线排班表

航班号	航线全称	机型	起飞时间	降落时间	起飞时间	降落时间
XX1405	西安-长沙-汕头	E190	0:15	2:00	3:00	4:20
XX1406	汕头-长沙-西安	E190	5:05	6:40	7:50	9:40
XX1437	西安-南充-三亚	A320	6:15	7:30	8:30	10:50
XX1438	三亚-南充-西安	A320	12:00	14:25	15:30	16:35
XX1439	西安-武汉-福州	E190	0:15	1:30	2:40	4:00
XX1440	福州-武汉-西安	E190	15:00	16:35	18:00	19:40
XX1459	天津-黄山-海口	E190	0:15	2:00	3:00	5:30
XX1460	海口-黄山-天津	E190	6:30	8:30	9:30	11:30
XX1533	西安-南京	A320	6:05	8:00		
XX1534	南京-西安	A320	9:00	11:00		
XX1571	西安-天津-沈阳	E190	10:45	12:40	13:40	15:05
XX1572	沈阳-天津-西安	E190	16:10	17:35	19:00	20:50
XX1583	天津-桂林	A320	0:05	4:00		
XX1584	桂林-天津	A320	5:00	7:15		
XX1599	西安-南昌-厦门	A320	0:00	2:00	3:00	4:30
XX1600	厦门-南昌-西安	A320	5:30	7:00	8:00	9:55
XX1603	天津-宁波	A320	5:30	7:00		
XX1604	宁波-天津	A320	8:00	9:30		
XX1607	天津-临沂-福州	E190	10:00	11:00	12:00	13:50
XX1608	福州-临沂-天津	E190	5:00	6:50	8:00	9:00
XX1609	天津-郑州-南宁	E190	0:40	2:00	3:00	5:30
XX1610	南宁-郑州-天津	E190	7:00	9:25	10:30	11:50
XX1611	天津-郑州-桂林	E190	13:00	14:30	15:30	17:35
XX1612	桂林-郑州-天津	E190	18:55	20:00	21:00	22:25
XX1614	温州-青岛-天津	E190	7:00	8:50	10:00	11:10

XX1615	天津-青岛-温州	E190	0:25	1:30	2:30	5:35
XX1617	天津-阜阳-厦门	E190	12:10	13:25	14:30	16:10
XX1618	厦门-阜阳-天津	E190	17:20	19:00	20:00	21:20
XX1627	天津-杭州	A320	8:30	10:15		
XX1628	杭州-天津	A320	11:20	13:15		
XX1645	西安-重庆	A320	11:00	12:10		
XX1646	重庆-西安	A320	20:45	21:50		
XX1647	西安-呼和浩特	A320	12:00	13:35		
XX1648	呼和浩特-西安	A320	15:00	16:45		
XX1649	西安-昆明	A320	17:40	19:50		
XX1650	昆明-西安	A320	21:00	23:00		
XX1657	天津-成都	A320	14:30	17:15		
XX1658	成都-天津	A320	18:30	20:50		
XX1661	天津-上海	A320	11:00	12:55		
XX1662	上海-天津	A320	14:00	16:00		
XX1663	西安-桂林	A320	18:00	19:45		
XX1664	桂林-西安	A320	21:00	22:45		
XX1668	三亚-贵阳-西安	A320	18:05	20:05	21:05	22:50
XX1667	西安-贵阳-三亚	A320	0:10	2:00	3:00	4:35
XX1669	天津-重庆	A320	17:25	19:45		
XX1670	重庆-天津	A320	13:10	16:25		
XX1681	天津-武汉-三亚	A320	12:00	13:45	14:45	17:05
XX1682	三亚-武汉-天津	A320	6:00	8:10	9:10	10:30
XX1689	天津-厦门	A320	17:00	19:35		
XX1690	厦门-天津	A320	21:00	23:25		
XX1691	天津-三亚	E190	12:40	16:40		
XX1692	三亚-天津	E190	18:00	21:20		

3. 程序

软件名称：MATLAB

编写的源程序：

%1 聚类程序，程序名称 julei.m

clc,clear

close all

load A1

r=corrcoef(A); %计算相关系数矩阵

d=tril(r); %取出相关系数矩阵的下三角元素

for i=1:18 %对角线元素化成零

d(i,i)=0;

end

d=d(:);

d=nonzeros(d); %取出非零元素

d=d';d=1-d;

```

z=linkage(d)
dendrogram(z)
xlabel('影响因素序号')
ylabel('欧式距离')

%2 主成分分析程序，程序名称：mainfac.m
clc,clear
load B %把原始的 x1,x2,x3,x4,y 的数据保存在纯文本文件 sn.txt 中
[m,n]=size(B);
num=7; %num 为选取的主成分的个数

mu=mean(B);
sigma=std(B);
snb=zscore(B); %数据标准化
b=snb(:,1:end-1); %x1,x2,x3,x4 的数据赋给 b
r=cov(b); %标准化数据的协方差阵就是相关系数阵
[x,y,z]=pcacov(r);
f=repmat(sign(sum(x)),size(x,1),1);
%x=x.*f;
ele(:,1)=y;
ele(:,2)=z;
for i=1:length(y)
    ele(i,3)=sum(ele(1:i,2));
end
y1=100*y/sum(y); %将 latent 总和统一为 100，便于观察贡献率
pareto(y1); %调用 matla 画图
xlabel('主成分')
ylabel('贡献率')

x=x.*f;
%以下是普通的最小二乘法回归
r=[ones(m,1),b]\snb(:,end); %标准化数据的回归方程系数
bzh=mu./sigma;
ch10=mu(end)-bzh(1:end-1)*r(2:end)*sigma(end); %原始数据的常数项
fr=r(2:end); fr=fr';
ch1=fr./sigma(1:end-1)*sigma(end); %原始数据的 x1,x2 等等系数
%以下是主成分回归
pval=b*x(:,1:num);
rp=[ones(m,1),pval]\snb(:,end); %主成分数据的回归方程系数
rp1=rp(2:end,1); %1 阶以上的项，非常数项
df=b*x(:,1:7); %求解各条航线啊对应主成分值
huigui1=df*rp1+rp(1,1); %求解主成分预测

```

```

beta=x(:,1:num)*rp(2:num+1); %标准化数据的回归方程系数
ch20=mu(end)-bzh(1:end-1)*beta*sigma(end) %原始数据的常数项
fr=beta';
ch2=fr./sigma(1:end-1)*sigma(end) %原始数据的 x1,x2 等等系数
check1=sqrt(sum((snb(:,1:end-1)*ch1'+ch10-snb(:,end)).^2)/(m-n))
check2=sqrt(sum((snb(:,1:end-1)*ch2'+ch20-snb(:,end)).^2)/(m-num-1))
huigui2=(snb(:,1:end-1)*ch2'+ch20);%各个层次都用到的预测

```

%3.排班程序,程序名称: arrangement.m

```

clear
clc
load List
%LA A320 LE E190
la=LA;
%第 1 次寻找, 起点在 5
ini1=(find(la(:,4)==max(la(11:19,4))));
rec(1,1:5)=la(ini1,1:5);
rec(1,6)=1;%第一架飞机
rec(1,7)=rec(1,4);%第一架飞机飞行时间
pos(1)=rec(1,3);%第一次终点
la(ini1,:)=[];%删行
    T=zeros(10,10);
    T(1,1)=rec(1,7);
    fir(1,1)=rec(1,2);%第 1 架飞机起点记录
    j=1;%第 j 架飞机
    i=2;

    while i<=length(LA(:,1))
%   for i=2:length(LA(:,1))%第 i 次寻找

        %起点匹配

        nump=(find(la(:,2)==pos(i-1)));
        %如果 nump=0, 即从上一个终点起飞的航班已经没有, 就在 1 和 5 中找始
        发站
        if isempty(nump)
            j=j+1;
            nump1=(find(la(:,2)==1));
            nump5=(find(la(:,2)==5));
            nump=[nump1',nump5'];
        end
        %时间最大
        numpmax=max(nump);
    end

```

```

    numpmin=min(nump);
    numt=(find(la(:,4)==max(la(numpmin:numpmax,4))));
    num=numt(1,1);%怕出现重合

    T(i,j)=T(i-1,j)+la(num,4);%单架飞机时间记录
    %单架飞机飞行时间判断
    if T(i,j)>24

if (rec(i-1,3)==1)||(rec(i-1,3)==5)%如果飞行时间大于 24，上一次终点在 1 或 5 ，
飞机架次加 1
    % if (rec(i-1,3)==fir(j))%如果上一次终点在该架飞机的起点
    %重新找 1 和 5 起飞的航线
    nump1=(find(la(:,2)==1));
    nump5=(find(la(:,2)==5));
    numph=[nump1',nump5'];
    %时间最大
    numpmax=max(numph);
    numpmin=min(numph);
    numt=(find(la(:,4)==max(la(numpmin:numpmax,4))));
    num=numt(1,1);%怕出现重合
%else%如果上一次终点不在 1 或 5 ，那么还要退回终点是 1 或者 5 的结果
    %% nump=(find(la(:,2)==pos(i-1)));
    % numpmax=max(nump);
    %numpmin=min(nump);
    %numt=(find(la(:,4)==min(la(numpmin:numpmax,4))));
    %num=numt(1,1);%怕出现重合
    end

    j=j+1;

    T(i,j)=T(i-1,j)+la(num,4) ;
    fir(j)=la(num,2);
end
rec(i,1:5)=la(num,1:5);
rec(i,7)=T(i,j);
rec(i,6)=j;
pos(i)=rec(i,3);%第 i 次终点
la(num,:)=[];%删行
i=i+1;
end
%4 画有向图程序，程序名称： Yxt.m

```

```
close all
clear
clc
load airline
    cm=E;
```

```
IDS={'西安','汕头','三亚','福州','天津','海口','南京','沈阳','桂林','厦门','宁波','南宁',
'温州','杭州','重庆','呼和浩特','昆明','成都','上海'};
```

```
bg=biograph(cm,IDS);
set(bg.nodes,'shape','circle','color',[1,1,1],'lineColor',[0,0,0]);
set(bg,'layoutType','radial');
bg.showWeights='on';
set(bg.nodes,'textColor',[0,0,0],'lineWidth',2,'fontSize',9);
set(bg,'arrowSize',12,'edgeFontSize',9);
get(bg.nodes,'position')
view(bg);
help biograph
```

%第 4 问求解和画图程序，程序名称：num4.m

```
close all
clear
clc
```

```
load num4
load P1
```

```
sumA=0;numA=0;
sumE=0;numE=0;
for i=1:length(B(:,1))
    if B(i,1)==0
        sumA=sumA+B(i,19);
        numA=numA+1;

    else
        sumE=sumE+B(i,19);
        numE=numE+1;

    end
end
xx=P1(1,:);
yy=P1(2,:);

a = 0.9004 ;
```

```

b = 3.205 ;
c = 0.08888;
x2=0:0.05:5;
for i=1:length(x2)
    y2(i)=a*exp(-b*x2(i))+c;

end

for n1=1:13
G(n1)=(C(3,n1)-2)*(330000*6.33735)+(C(2,n1)-4)*(250000*6.33735);
G2(n1)=30*(sumA+sumE)-G(n1);
end
G1=(G-min(G))/(max(G)-min(G));
figure(2)
plot(C(1,:),G/10000,'b*','MarkerSize',8)
grid on
xlabel('时间裕度');
ylabel('租赁损失代价(万元)');
figure(3)
plot(C(1,:),G1(1:),'b*','MarkerSize',8);
hold on
plot(x2,y2,'r-','MarkerSize',8);
hold on
plot(A(1,:),A(2:),'ro','MarkerSize',8);
hold on
plot(P(3,1:4),P(4,1:4),'ro','MarkerSize',8);

grid on
xlabel('时间裕度/小时');
ylabel('代价系数');
legend('收益损失代价','航班延误代价')

%figure(4)
%plot(C(1,:),G2/10000,'b*','MarkerSize',8)
%grid on
%xlabel('时间裕度');
%ylabel('总收益(万元)');
figure(5)
plot(P(1,1:3),P(2,1:3),'b*','MarkerSize',8);
hold on
plot(P(3,1:4),P(4,1:4),'bo','MarkerSize',8);
hold on
plot(x2,y2,'r-','MarkerSize',8);

```

```

grid on
xlabel('时间裕度/小时');
ylabel('代价系数');
legend('根据附件 2 计算所得数据','根据民航报告计算所得数据','拟合曲线')

```

```

figure(6)
load xy2
plot(C(1,:),G1(1:,:), 'b*', 'MarkerSize', 8);
hold on
plot(xy2(1,:),xy2(2,:), 'r-', 'MarkerSize', 8);
hold on
grid on
xlabel('时间裕度/小时');
ylabel('代价系数');
legend('收益损失代价','航班延误代价')
plot(A(1,:),A(2,:), 'ro', 'MarkerSize', 8);
hold on
plot(P(3,1:4),P(4,1:4), 'ro', 'MarkerSize', 8);

```

```

grid on
xlabel('时间裕度/小时');
ylabel('代价系数');
legend('收益损失代价','航班延误代价')

```

```

figure(7)
YY=0.3*G1(1:,:)+0.7*xy2(2,:);
plot(C(1,:),0.3*G1(1:,:)+0.7*xy2(2,:), '-b*', 'MarkerSize', 8);
xlabel('时间裕度/小时');
ylabel('时间裕度代价系数');
grid on

```

%画图程序 6， 程序名称： huatu.m

```

clc
clear
close all
load A

```

```

figure (1)
plot(A(:,6),A(:,2), 'r*', 'MarkerSize', 7)
hold on
plot(A(11,6),A(11,2), 'bo', 'MarkerSize', 8);hold on;
plot(A(12,6),A(12,2), 'bo', 'MarkerSize', 8);hold on;
plot(A(19,6),A(19,2), 'bo', 'MarkerSize', 8);hold on;
plot(A(20,6),A(20,2), 'bo', 'MarkerSize', 8);hold on;

```

```

plot(A(27,6),A(27,2),'bo','MarkerSize',8);hold on;
plot(A(28,6),A(28,2),'bo','MarkerSize',8);hold on;
plot(A(34,6),A(34,2),'bo','MarkerSize',8);hold on;

```

```

grid on
xlabel('飞行时间/小时');
ylabel('全票票价/元');

```

```

load B
figure (2)
s1= plot(B(1,7),B(1,10),'b*','MarkerSize',7);hold on
s2= plot(B(3,7),B(3,10),'r*','MarkerSize',7);hold on
for i=1:length(B(:,1))
    if B(i,1)==0
plot(B(i,7),B(i,10),'r*','MarkerSize',7);
hold on
    else
        plot(B(i,7),B(i,10),'b*','MarkerSize',7);
        hold on
    end
end
legend('E190','A320')
xlabel('飞行时间/小时');
ylabel('燃油成本/元');
grid on

```

```

figure (3)
plot(A(:,6),A(:,13),'b>','MarkerSize',7);
hold on
xlabel('飞行时间/小时');
ylabel('保险费成本/元');
legend('保险费');
grid on

```

```

figure (4)
plot(A(:,6),A(:,15),'bs','MarkerSize',7);
hold on
plot(A(:,6),A(:,16),'k>','MarkerSize',7);
hold on
plot(A(:,6),A(:,17),'rd','MarkerSize',7);
hold on
xlabel('飞行时间/小时');
ylabel('成本/元');

```

```
legend('不正常航班费用','航材维修费用','发动机维修费用');  
grid on
```

```
figure (5)  
plot(A(:,6),A(:,8),'bs','MarkerSize',7);  
hold on  
plot(A(:,6),A(:,10),'k>','MarkerSize',7);  
hold on  
plot(A(:,6),A(:,14),'ro','MarkerSize',7);  
hold on
```

```
xlabel('飞行时间/小时');  
ylabel('成本/元');  
legend('机组工资','起降及非航空性费用','航材消耗费用');  
grid on
```

```
load B  
figure (6)  
plot(B(:,6),B(:,1),'bs','MarkerSize',7);  
hold on  
plot(B(:,6),B(:,15),'ro','MarkerSize',7);  
xlabel('飞行时间/小时');  
ylabel('成本/元');  
legend('机型','航材消耗');  
grid on
```