



2015 湖南省研究生数学建模竞赛参赛承诺书

我们仔细阅读了湖南省研究生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权湖南省研究生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号是（从组委会提供的试题中选择一项填写）：B

我们的参赛报名号为（如果组委会设置报名号的话）：

所属学校（请填写完整的全名）：中国人民解放军国防科技大学

参赛队员（打印并签名）：1. 赵丹玲

2. 程然

3. 杨凤波

指导教师或指导教师组负责人(打印并签名)：

日期： 2015 年 9 月 15 日

评阅编号（由组委会评阅前进行编号）：

湖南省首届研究生数学建模竞赛

题目 航班计划的合理编排

摘要：

航班计划的合理编排问题主要是在不同的约束条件或者编排原则下找到最好的编排计划，实际上就是规划问题。本文根据附件 1 中的航线数据，将各航线的衔接抽象成有向图，再进一步引入航班节的概念将待编排的航线抽象成无向图，最后在各个问题的条件约束下寻找最优排班计划。

问题一：根据利润等于总收入减去总支出的公式，计算得到 7 条航线存在亏损，分别是西安-天津-沈阳、沈阳-天津-西安、天津-临沂-福州、福州-临沂-天津、天津-阜阳-厦门、厦门-阜阳-天津和呼和浩特-西安。影响航空公司收益的主要因素是客座率，全票价格和票价折扣率。针对亏损的航线，我们提出以下整改措施：

- (1) 进行动态定价
- (2) 客座率较小的航线更换小型飞机运行
- (3) 提高客座率，适当进行机票超售

问题二：首先根据附件 1 的数据将所有航班线抽象成有向图，各顶点表示航班的起点或终点，边的权值为完成该航班正常需要花费的时间。由于从 A 地到 B 地和从 B 地到 A 地一般由同架飞机执行，所以引入航班节的概念将其抽象成无向图。然后根据“所需飞机数量最小化”的原则，将题目转化成多邮递员的遍历问题，即用最少的邮递员遍历完所有的边，每条边有且仅能通过一次。最后借鉴贪心算法设计出有效的遍历算法，得到最少需用 E190 型飞机和 A320 型飞机各 6 架才能完成所有航线，具体的航班计划见正文的表 4-4 和表 4-6。经过重新编排后航空公司的月盈利为 4254 万元，比原排班计划的盈利额增加了 2269 万元。

问题三：首先根据问题二的航班计划分别计算出各飞机的检修周期，接着以飞机的数量为行数，以同一类型飞机检修周期的最小公倍数为列数，建立状态矩阵，初始处于飞行状态。然后逐渐增加新飞机作为替换飞机，在矩阵中将其初始状态设置为闲置状态。然后从维修周期长的飞机进行判定，将问题转化成类似 0-1 指派问题。最后计算得到在不改变问题二中所求航班计划的情况下，要使航空公司正常营运，至少需要新增加 E190 型飞机 1 架，A320 型飞机 1 架。

问题四：由于平均衔接时间无法考虑航班延误的连续性，我们在评价航班计划的鲁棒性时提出了平均延误概率这一指标，有效地对鲁棒性进行了量化。在综合衡量航班计划鲁棒性和所需飞机数量的情况下，我们找到了在鲁棒性相对较强且所需飞机数量尽可能少的最优方案，具体航班计划见正文的表 4-11 和表 4-13。在最优的情况下，需要使用 9 架 E190 飞机，此时的飞机延误率为 37.05%，鲁棒性与问题二中航班计划相比提升了接近 1 倍。另外，A320 型飞机也需要使用 9 架，此时飞机延误率为 31.09%，鲁棒性与问题二中航班计划相比提升了接近 1.5 倍。

关键字：所需飞机数量最小化 航班计划 编排 鲁棒性

航班计划的合理编排

1 问题重述和分析

航班计划是航空公司一切生产活动的基础和核心，它规定了飞行的航线、航段、机型、航班号、班次和班期、起降时刻等。一个合理的航班计划应该既有助于航班的安全运行，又能提高飞机的利用率，还可以有效地降低运营及维护成本，提高公司的经济效益。

国内某航空公司每月末对本月各航线和机型的收益情况进行分析，同时结合现有的生产资源进行下一个月航班计划的编排。已知该公司有2架A320飞机和4架E190飞机，维修的基站设立在西安和天津，在制定航班计划过程中不会取消或拆分带有经停航点的航线。根据附件1和附件2中给出的数据，在本文中我们主要对以下问题进行分析讨论：

问题一：对附件1中给出的数据进行航线收益分析，找出影响收益的主要因素，并根据分析结果提出针对亏损航线的整改措施。

分析：航空公司的收入主要是来自机票的销售，即收入等于实际票价乘以实际卖出的票数，在文中等于全票价格乘以票价折扣率乘以座位数乘以客座率。公司的支出主要是各项消耗和运营成本，包括机组人员、航油费、起降及非航空性业务费、餐食、机供品、保险费、航材消耗、不正常航班费用、航材维修费、发动机维修费等。公司的收益情况是通过收入减去支出来衡量的。根据初步分析，影响收益的主要因素是实际票价和出售的机票数，即与全票价格、票价折扣和客座率有较大的关系。通过计算可以找出亏损的航线，针对亏损航线就几项主要影响的因素进行分析和整改。

问题二：假定各航线的航班时刻可以根据需要变动，同时假定现有飞行航线和航空公司的营销能力是稳定的（航线、平均客座率、平均折扣率不变），在这种情况下为航空公司制定一份下个月的航班计划，使航空公司的收益最大化。

分析：由于航空公司的营销能力是稳定的，假定制定航班计划过程中不能进行机型的更换，则航空公司的收入是不变的。为了使得航空公司的收益最大化，只能通过尽量减少租借飞机来实现。那么问题转换成了用最少数量的飞机完成原定航线的编排。在编排过程中，要尽可能让每架飞机在工作时间内负责尽可能多的航班。在这个过程中，要注意同一架飞机负责的航班两两之间的起点或者终点必须相同，这样飞机才可能顺利进行衔接。

问题三：如果考虑满足飞机维修需要，即每架飞机累计飞行130个小时就必须在维修基地停车场维修一次，每次停车场时间为24小时。那么，在不改变问题二中所求航班计划的情况下，要使航空公司正常营运，至少需要新增加两种类型的飞机各多少架？

分析：根据航班计划可以求出每架飞机每天的飞行时间，从而计算出各飞机需要维修的周期。由于要使得增加的飞机数量最小，则可以考虑先增加一架飞机后判定是否能满足航空公司的营运。新增加的飞机作为其他飞机进行维修时替换运行的飞机，若某天没有飞机进行维修，则替换飞机处于闲置状态。以天为单位进行替换，则该问题转化成0-1指派问题。

问题四：航班计划的“鲁棒性”是生产运行过程中需要考虑的一个重要因素，即设定一定的时间裕度以便在出现某一航班延误时能够减少对后续航班的影响。根据附件2

中给出的数据请对问题 2 中求得的航班计划的“鲁棒性”进行评价，并重新制定一个带有“鲁棒性”约束的最优航班计划。

分析：一般评价航班计划的鲁棒性是用航班的衔接时间进行衡量的。虽然平均衔接时间可以从一定程度上体现鲁棒性，但是在评价过程中忽略了多个航班衔接的情况，即上一次的飞机延误对于下一次延误产生影响。为了进一步考虑航班延误影响的连续性，我们可以用平均延误概率来衡量鲁棒性，即每一航班飞机延误对下一衔接航班影响的概率的平均值。在鲁棒性约束的条件下制定最优航班计划，首先要明确何为最优。由于飞机不可能出现不延误的情况，所以我们认为尽量在使用较少飞机的情况下让鲁棒性达到一个较优状态。也就是说，在最少使用飞机的情况下慢慢增加飞机的数量，求出在不同飞机数量的情况下航班计划的鲁棒性。若当增加一架飞机，此时航班计划的鲁棒性提升较少的话，那么选择之前使用原数量的飞机，此时对应的航班计划为最优的，即保证了鲁棒性，也能尽可能减少计划支出。

2 假设和说明

- (1) 每个航线每日只安排一个班次的飞机。
- (2) 公司每月的收入和支出是比较稳定的，假设每月的收支可以用附件 1 中给出的单日运行成本及收入明细乘以天数（30 天）来衡量。
- (3) 假设在问题二中航班全价票的价格也是不变的。
- (4) 由于制定的航班计划需要运行一月，为避免出现延误情况，在问题二中不采取压缩过站时间的方式，即在本文中采用一般飞机过站时间，经查询文献后确定过站时间统一使用 40 分钟。
- (5) 在问题三中将排班周期制定为 30 天，因为题目中提及航空公司每月末会根据本月情况调整航班计划，所以只要保证在一个月內可以维持正常营运即可。

3 符号说明

R ：航线的总收入

C ：航线的总运营成本

M ：航线的收益

t_{ab} ：从 a 地到 b 地的航班花费的时间

\bar{t}_{ab} ：从 a 地到 b 地的航班节所花费的时间，包括航班来回时间和过站时间

GT ：标准过站时间

\tilde{T}_m ：飞机 m 的检修周期

S_{ij} ：飞机状态（0 为飞行，1 为维修，2 为闲置）

p_{ij} ：飞机 i 在航线 j 中的延误概率

P_d ：平均延误概率（飞机延误对下一航班影响的概率的平均值）

4 模型的建立、求解和分析

4.1 航线收益情况分析与整改措施

航线收益是指航空公司在航线上投入商业运营所获得的销售收入，它是衡量航空运输管理水平的重要指标。

在航班运营中，直接影响航空公司收入的票价水平和客座率。在附件 1 中给出了四项相关的指标，分别是飞机座位数、全价票价格、平均折扣率和客座率，我们分别用 N 、 P 、 d 和 x 表示，则航班的收入 R 可以表示为：

$$R = N \cdot x \cdot P \cdot d$$

在航班运营过程中，存在多项开支和消耗，主要有机组人员、航油费、起降及非航空性业务费、餐食、机供品、保险费、航材消耗、不正常航班费用、航材维修费、发动机维修费等，分别用 c_1, c_2, \dots, c_{10} 表示，则运营成本 C 表示为^[1]：

$$C = \sum_{i=1}^{10} c_i$$

根据利润的公式计算，我们可以得到航线的收益 M 为：

$$M = R - C$$

根据附件 1 中给出的数据，我们可以计算得到 52 条航线的收益，具体展示如下图：

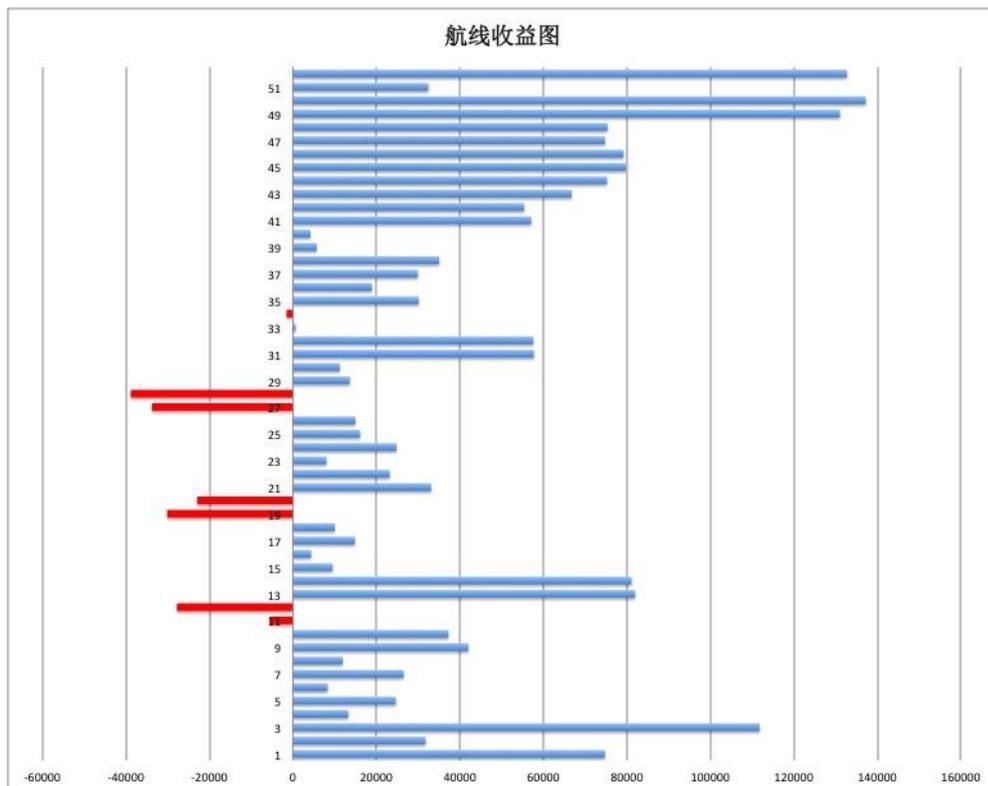


图 4-1 航线收益图

从上图中可以明显发现，在 52 条航线中有 7 条航线存在亏损，分别是西安-天津-沈阳、沈阳-天津-西安、天津-临沂-福州、福州-临沂-天津、天津-阜阳-厦门、厦门-阜阳-天津和呼和浩特-西安。

根据计算航班利润的公式，我们知道航班的收益为：

$$M = N \cdot x \cdot P \cdot d - \sum_{i=1}^{10} c_i$$

对于确定机型的飞机来说，航班的座位数是一定的，而航班的运营成本之间相差并不大。在运营过程中，影响航线收益的主要因素是实际票价水平和客座率。

(1) 实际票价水平

票价水平是影响航线收益最直接的因素。一般来讲，票价水平高的航线收益也高，而票价水平上不去的航线，收益的实现也难。在实际生活中，航空公司会推出打折机票用以吸引观众，所以实际票价水平是全价票价格乘以平均折扣率，即 $P \cdot d$ 。从附件 1 中我们可以发现这样两组数据。

表 4-1 实际票价构成举例

组别	航线全称	座位数	全价票价格	平均折扣率	客座率(%)	总成本	收益
1	西安-长沙-汕头	106	1,760.00	81.98%	89.29%	61,824.98	74736.83
	汕头-长沙-西安	106	1,760.00	57.39%	91.07%	65,780.81	31724.92
2	西安-天津-沈阳	106	1,500.00	41.16%	84.11%	60,677.74	-5632.46
	沈阳-天津-西安	106	800.00	48.66%	88.47%	64,294.17	-27788.19

在第一组数据中，西安-长沙-汕头航线的收益是汕头-长沙-西安的 136%。这两条航线的成本支出相差很小，主要是第二条航线的平均折扣率远低于第一条航线的平均折扣率，从而导致了第二条航线实际票价低于第一条航线，最终使得西安-长沙-汕头的航线收益较高。

在第二组数据中，西安-天津-沈阳的收益比沈阳-天津-西安多了 22155 元，其中成本少了 3616 元，即第一条航线的收入比第二条航线多了 18539 元。通过对比两条航线的全价票价格，我们发现第一条航线的全价票价格远高于第二条航线，因此其实际票价也远高于第二条航线，最终使得西安-天津-沈阳航线的收益较高。

(2) 客座率

客座率也是与票价水平一样直接影响航线收益的一个因素，客座率高的航线容易盈利。一条航线，一般在通航初期时航班的客座率较低，经过一段时间的市场培养和开发，航班的客座率随之上升，因此，客座率可以看作一个直观的评价标准来评价航班的盈利情况。但若航班的客座率长期偏高，可能是需求溢出的表现，这可能会导致航空公司提供服务的质量下降；若航班的客座率长期偏低，则可能是市场需求过低或客舱分级设置需要优化。从附件 1 中我们可以发现如下数据：

表 4.2 客座率影响举例

航线全称	飞机座位数	全价票价格	平均折扣率	客座率(%)	总收入	总成本	总收益
西安-南充-三亚	180	1,990	57.39%	95.65%	196628	84833	111795
三亚-南充-西安	180	1,990	57.39%	46.39%	95364	82128	13235

根据数据可以发现西安-南充-三亚这一航线的客座率远远高于三亚-南充-西安航线，因此第一条航线的总收入比第二条航线的总收入高了一倍多，而两航线所飞行的路程相同，则总成本相差不大，最终发现客座率是影响航线收益的一个重要因素。

根据分析,我们得到影响航线收益的两个主要因素是实际票价和客座率,因此根据这两个因素针对亏损的航线提出以下整改措施。

(1) 进行动态定价

在机票定价的过程中实行动态定价,根据实际运营支出实时调整机票的价格。若全价票的价格较高时,可以通过加大折扣的力度,从而降低机票的价格;若全价票的价格较低,则要降低机票的折扣率,从而保证实际机票的价格在一定的水平上,从而保证航班不处于亏损状态。

(2) 提高客座率,适当进行机票超售

客座率(Play load, PL)直接反映航班的生产效率。客座率反映了市场需求的随机性,也反映了公司“供”与市场“需”之间的博弈作用。运力供应合理,客座率相应的会保持在一定的合理范围内;运力供应失调时,客座率过低说明航空公司生产效率低下,单位收益率也低,客座率过高说明航班有可能已经出现旅客拒载、需求溢出的情况。客座率是收益增减的风向标之一。据鲍伊尔测算,客座率每提高1%,单位成本可降低2.64%^[2]。旅客定票后并未购买或购票后在不通知航空公司的情况下放弃旅行,从而造成航班座位虚耗,降低了客座率。为了满足更多旅客的出行需要和避免航空公司座位的浪费,航空公司会在部分容易出现座位虚耗的航班上,进行适当的超售。

(3) 客座率低的航班更换小型飞机

每种机型都有其载容量限制。机型决定一架飞机的载运力,机型变化,意味着供给变化。机型过大,运力浪费;机型过小,需求溢出。每条航线只有配备适合的机型,在不浪费运力的前提下最大限度的满足需求,以合理的客座率运营,才能最大限度的实现收益。当飞机的客座率较小,使得小型飞机能够满足实际的载容量时,可以进行机型的更换,从而降低运营成本,改善航班的亏损情况。在七条亏损航线中,呼和浩特-西安的航线采用的是A320型飞机,客座率仅有58.55%。将飞机机型更换成106座的E190型,可以大量减少航班的成本(机组人员工资、航油费、起降费用和航材维修费等等)。

4.2 基于最少需用飞机数的排班问题

由于航空公司的营销能力以及航线是不变的,所以在航空公司的运营过程中只有排班的时刻可以进行调整,即只能通过压缩租借飞机的数量来减少公司的支出,从而使得航空公司的收益最大化,即将原问题转换成尽可能紧凑的航班节衔接问题^[3]。

4.2.1 飞机的排班原则

飞机排班是航空公司生产计划中的一项控制性工作,它的质量不仅决定着运输生产能否安全、正点的运行,而且还关系到飞机维护计划能否顺利执行,在飞机排班工作中必须遵守以下基本原则^[4]:

1. 飞机排班应符合航班计划的要求

航班计划中明确规定了每个航班所使用的机型、航班的起飞机场和到达机场、起飞时刻和到达时刻,这就要求首先:分配给每个航班的飞机应与该航班的机型属性一致,其次是指派给同一架飞机的相邻两个航班应符合航站楼衔接和过站时间衔接要求,即前一航班的到达机场应与后一航班的起飞机场相同,并且前一航班的到达时刻应在后一航班的起飞时刻之前,且中间的时间间隔不得低于该型号飞机完成一次地面过站作业(如客货的装卸、飞机清洁等)所需要的最低时间标准,如B737、A320等型号的飞机过站作业一般需要40分钟^[5]。

2. 每架飞机在同一时段最多只能执行一个航班。

3. 每个航班应当,且仅能安排一架飞机执行。
4. 同一个航班节由同一架飞机完成,即同一架飞机要完成往返程的航线。
5. 最少需用飞机数要求

在本题目中要求制定的航班计划使得航空公司的收益最大化,由于公司的营销能力是稳定的,所以只能通过尽可能减少使用飞机的数量来提高公司的收益。因此,飞机排班的基本目标是用最少的飞机承担起尽可能多的航班任务^[6]。当需要根据“需用飞机数最少”的原则调度飞机时,基本的要点有:

- (1) 根据紧凑衔接的原则将航班节编组,然后对航班节组指派飞机。
- (2) 允许对标准过站时间进行压缩,但不得少于最低过站时间要求。
- (3) 应尽量减少由于过站时间压缩而引起的航班延误^[7]。

4.2.2 数学模型的构建

根据附件 1 中的航线的特点,我们可以将航班之间的衔接问题抽象成一个有向图 $G=(V,E)$,其中顶点 V 表示航线的起点(终点),边 E 上的权值表示完成这一航线所需要的时间。将各航线的衔接抽象成图,具体表示如下:

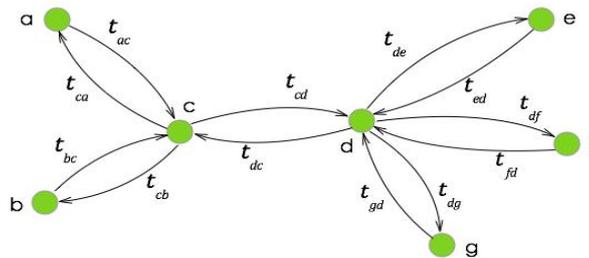


图 4-2 城市航线结构有向图

要使得航空公司利益最大化,实际上就是通过紧凑衔接来用最少的飞机在规定的条件下完成所有的航线。那边我们首先需要对航线进行编组,在飞机可工作的时间段内衔接更紧密,进而减少飞机的数量。由于在实际编排过程中,一般安排同一架飞机执行同一航班节,即从 A 地飞往 B 地和从 B 地飞往 A 地是同一架飞机执行的。因此我们将有向的航线图转化为无向图,边 E 上的权值 \bar{t}_{ab} 由有向图中的 t_{ab} , t_{ba} 和过站时间 GT 相加得到,

即: $\bar{t}_{ab} = t_{ab} + t_{ba} + GT$

其中 t_{ij} 为飞机由 A 飞往 B 所需时间, GT 为飞机过站时间。则上述的航线图表示为:

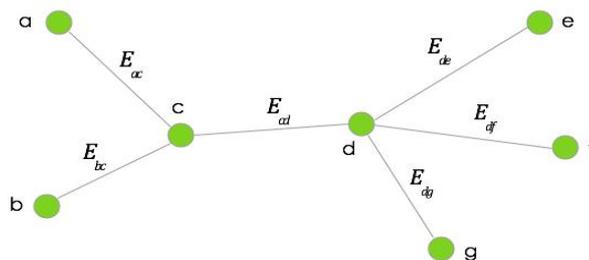


图 4-3 城市航线结构无向图

我们可以将此问题看作多邮递员问题，即有多个邮递员共同分工合作，每个人负责其中几条投递路线，每条路线都有且只有一人来过，每个邮递员的出发时间最多只能从 7:00 到 01:30，每条路线都需要花费一定的时间，并且在到达点处邮递员至少需要休息 GT 后才能进行下次的派送，求出在一天内走完所有投递路线所需要的最少的邮递员数量。

根据附件数据和实际生活中国内航班的编排情况，我们假定飞机的工作时间为 7:00~01:30，即飞机最早从 7:00 起飞，最晚在 01:30 降落。一架飞机可进行航班编排的总时间 T 为 18.5 小时。那么航班节的编组问题可以归结为：

- (1) 编排给同一架飞机的航班节时间及过站时间相加不超过 T
- (2) 只有起点或终点有联系的航班节能够编排给同一架飞机
- (3) 尽可能用最少的飞机完成所有航班节的编排工作

根据上述的原则和要点，下面基于贪心算法的基础上设计一个遍历算法完成航班节的编组。

遍历算法

算法的基本思想是：首先建立边的集合，选取度大于等于 2 的顶点 V ，则各集合包含与顶点 V 相连接的边的集合，即有可能存在衔接关系的边集合；然后在元素数量最少的集合中任意选取一条边，若该边仅存在此集合中，则只能从该集合中寻找衔接边；若该边同时存在其他集合中，则可从包含此边的集合中寻找衔接边形成新的航线，每次寻找到一条衔接边需要花费过站时间 GT ，若构成的航班节排班总时间小于 T ，则认为此航班节排班是有效的，继续选取衔接边，直至找不到满足要求的衔接边后，将此次编排选出的元素加入新集合 FJ 中构成一个新的集合并将其从原集合中删除。重复上述的步骤，直到最后各集合均为空集时，集合 FJ 中的集合数即为所需飞机的数量。

具体步骤如下：

Step1: 构建可能进行衔接的集合 $E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ ，其中 n 为度大于等于 2 的顶点数， $E_i = \{e_{ij} \mid e_{ij} \text{ 为与顶点相连的边}\}$ ， \bar{t}_{ij} 表示完成航班节 e_{ij} 所需的时间，即元素 e_{ij} 的值。

Step 2: 选取元素数量最少的集合 E_i ，任意选择一个元素 e_{ij} ，令 $t=0$ 且 $t = t + \bar{t}_{ij}$ ，将 e_{ij} 加入集合 F 中。

Step 3: 判断是否存在 $e_{ij} \in \{E_i \cap E_j\}$ 。若存在，则令 $\bar{E} = \{E_i \cup E_j - e_{ij}\}$ ；若不存在，则令 $\bar{E} = \{E_i - e_{ij}\}$ 。

Step4: 判断 \bar{E} 是否为空集。若 $\bar{E} = \emptyset$ ，则转到 Step6；若 $\bar{E} \neq \emptyset$ ，则转到 Step5。

Step5: 选取 \bar{E} 中值 \bar{t}_{ij} 最大的元素 E_j ，令 $t = t + GT + \bar{t}_{ij}$ 。若 $t \leq T$ （飞机可工作时间），则将 e_{ij} 加入集合 F 中，然后转到 step3。若 $t > T$ ，则令 $t = t - \bar{t}_{ij}$ ， $\bar{E} = \bar{E} - e_{ij}$ ，转到 Step4。

Step6: 将集合 F 加入集合 FJ 中，并令 $E = E - F$ ，即将集合 F 中包含的元素从原

集合中删除。若原集合 E 不为空集，则转到 Step2；若集合 E 为空集，则结束。

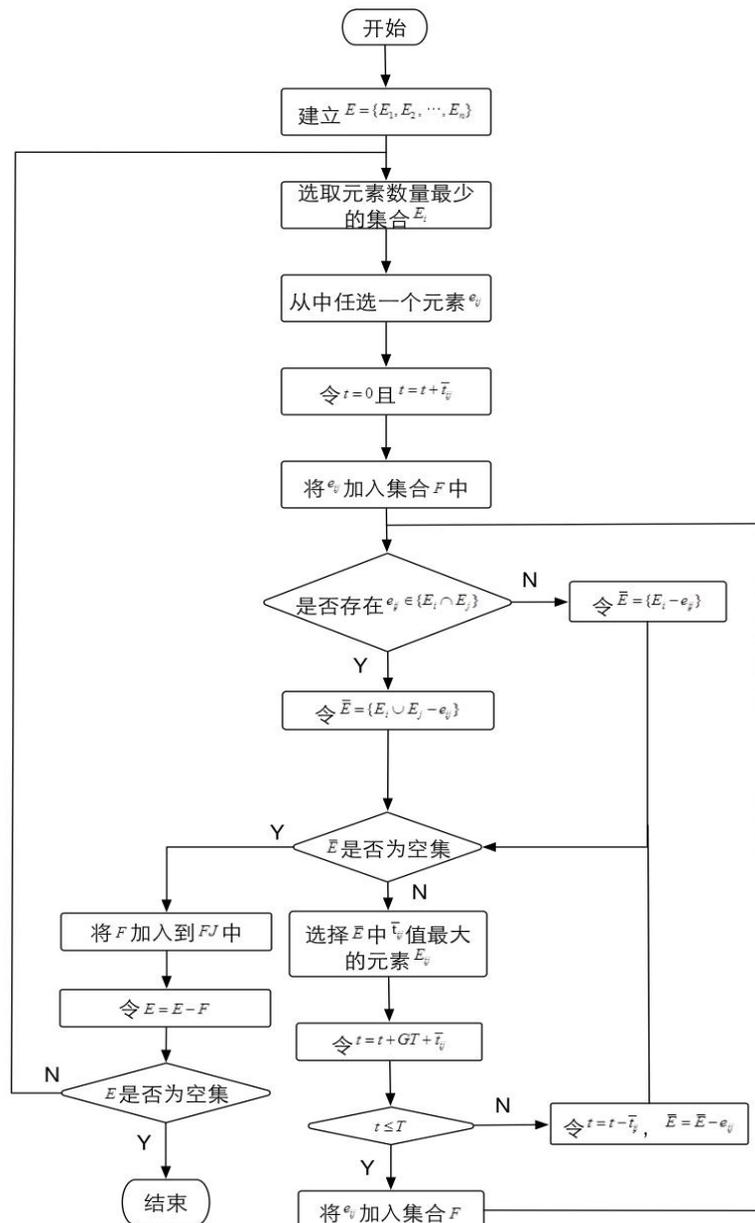


图 4-4 飞机排班流程图

通过这个算法，我们尽可能将飞机每天能工作的时间排满，从而得到包含最少航班节组合的集合 FJ 。根据该算法计算，我们可以使用最少的飞机完成所有航线，从而有效压缩租借飞机的数量，大大减少了航空公司的支出。最后我们将各编组内的航线进行合理排班，便可以使得航空公司的利益最大化。

4.2.3 算法应用和问题求解

由于在制定航班计划中不考虑飞机机型的改变，所以附件 1 中的航班编排问题可以分机型进行，即对 E190 型飞机和 A320 型飞机各自进行编排。

(1) E190 型飞机的航班计划

根据附件 1 中的航线，我们将型 E190 负责的航线以及每段航线所需要花费的时间抽象成图，具体表示如下：

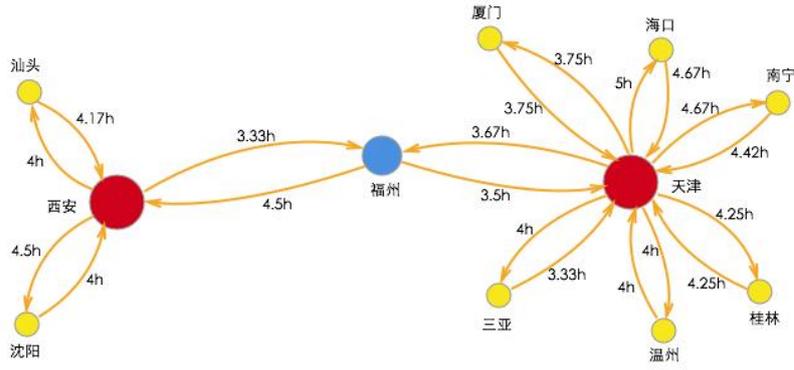


图 4-5 E190 型飞机航班有向图

根据飞机排班的原则可知，同一航班节由同一架飞机运行，故将上述航线图进一步抽象成如下图所示的无向图。

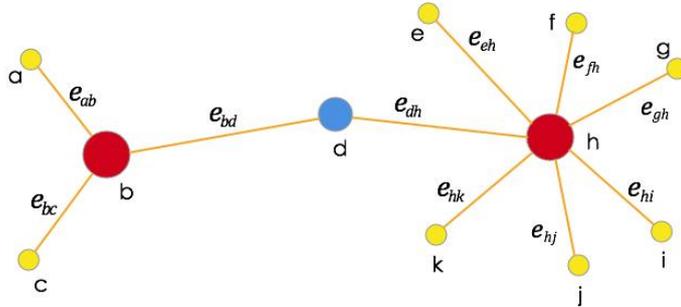


图 4-6 E190 型飞机航班无向图

根据实际查找资料可知，在文中标准过站时间 GT 为 40 分钟，飞机可运行的工作时间（即一天内最后一次降落与第一次起飞的时间差） T 为 18.5 小时。根据上图可知：

$$E_1 = \{e_{ab}, e_{bc}, e_{bd}\}, \quad E_2 = \{e_{bd}, e_{dh}\}$$

$$E_3 = \{e_{dh}, e_{eh}, e_{fh}, e_{gh}, e_{hi}, e_{hj}, e_{hk}\}, \quad E = \{E_1, E_2, E_3\}$$

各航班节所需的时间 $\bar{t}_{ij} = t_{ij} + t_{ji} + GT$ ，具体如下：

表 4-3 E190 航班节时间表

航班节	航班节所需时间 (h)	航班节	航班节所需时间 (h)
\bar{t}_{ab}	8.84	\bar{t}_{fh}	10.34
\bar{t}_{bc}	9.17	\bar{t}_{gh}	9.76
\bar{t}_{bd}	8.5	\bar{t}_{hi}	9.17
\bar{t}_{dh}	7.84	\bar{t}_{hj}	8.67
\bar{t}_{eh}	8.17	\bar{t}_{hk}	8

将上述数据代入算法中进行计算，可以得到：

$$FJ = \{\{e_{bc}, e_{bd}\}, \{e_{ab}\}, \{e_{hi}, e_{hj}\}, \{e_{dh}, e_{gh}\}, \{e_{eh}, e_{hk}\}, \{e_{fh}\}\}$$

即在满足所有航线的条件下，所需要使用的 E190 型飞机数量最少为 6 架。在利益最大化的前提下制定航班计划，则航班计划具体为：

表 4-4 E190 航班计划表

航班号	航线全称	起飞时间	降落时间	起飞时间	降落时间	飞行小时
XX1571	西安-天津-沈阳	7:00	8:55	10:05	11:30	3.13
XX1572	沈阳-天津-西安	12:10	13:35	14:20	16:10	3.60
XX1439	西安-武汉-福州	16:50	18:05	15:50	20:10	3.31
XX1440	福州-武汉-西安	20:50	22:25	23:40	1:20	3.57
XX1405	西安-长沙-汕头	7:05	9:05	9:45	11:05	3.41
XX1406	汕头-长沙-西安	11:45	13:20	15:05	15:55	3.70
XX1615	天津-青岛-温州	7:00	8:05	8:55	11:00	3.44
XX1614	温州-青岛-天津	11:40	13:30	14:30	15:40	3.14
XX1611	天津-郑州-桂林	16:20	17:50	18:30	20:35	3.66
XX1612	桂林-郑州-天津	21:15	23:20	0:05	1:30	3.47
XX1607	天津-临沂-福州	7:05	8:05	8:55	10:45	3.09
XX1608	福州-临沂-天津	11:25	13:15	13:55	14:55	3.16
XX1609	天津-郑州-南宁	15:35	16:55	17:45	20:15	4.12
XX1610	南宁-郑州-天津	20:55	23:20	0:00	1:20	3.91
XX1691	天津-三亚	7:10	11:10			4.22
XX1692	三亚-天津	11:50	15:10			4.17
XX1617	天津-阜阳-厦门	15:50	17:05	17:55	19:35	3.52
XX1618	厦门-阜阳-天津	20:15	21:55	22:40	0:00	3.38
XX1459	天津-黄山-海口	7:15	9:00	9:45	12:15	4.31
XX1460	海口-黄山-天津	12:55	14:55	15:35	17:35	4.38

其中各飞机负责的航线和时刻表可以表示为：

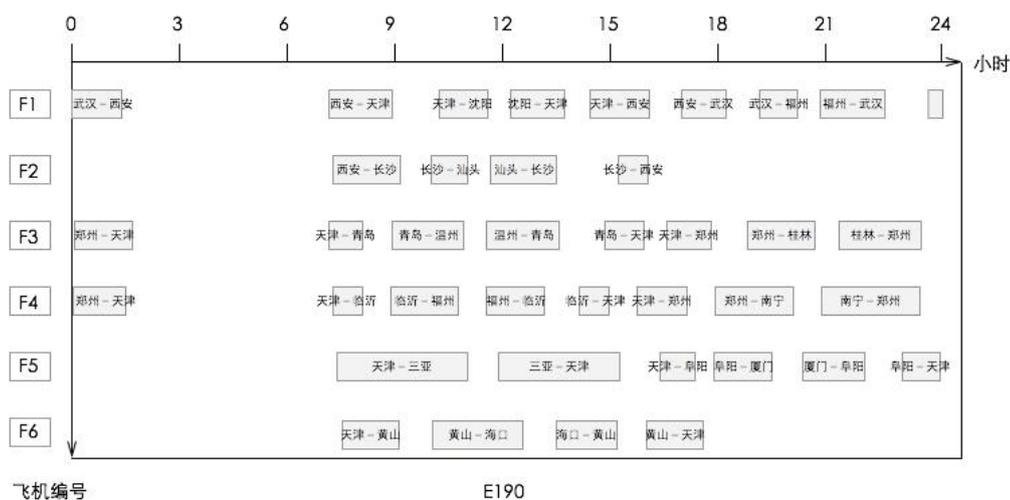


图 4-7 E190 航班计划时刻图

(2) A320 型飞机的航班计划

根据附件 1 中的航线，我们将型 A320 负责的航线以及每段航线所需要花费的时间抽象成图，具体表示如下：

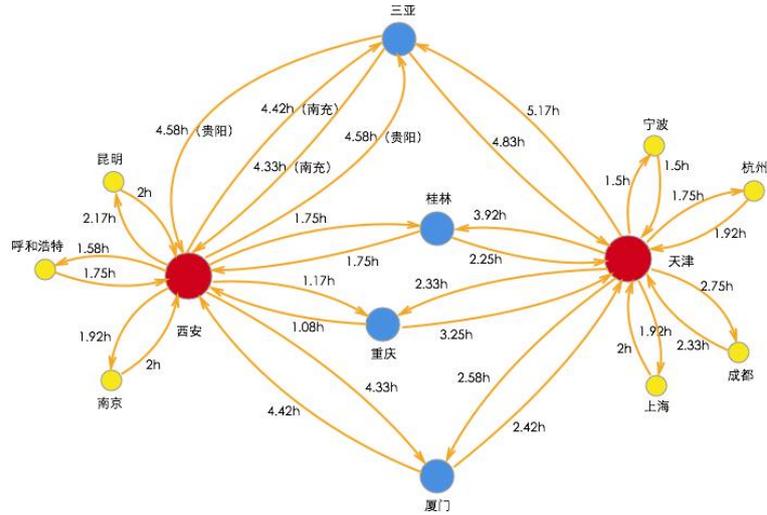


图 4-8 A320 型飞机航班有向图

根据飞机排班的原则可知，同一航班节由同一架飞机运行，故将上述航线图进一步抽象成如下图所示的无向图。

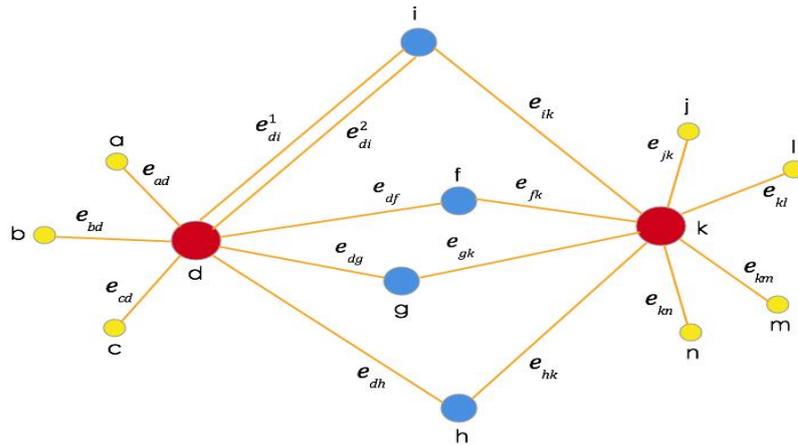


图 4-9 A320 型飞机航班无向图

根据实际查找资料可知，在文中标准过站时间 GT 为 40 分钟，飞机可运行的工作时间（即一天内最后一次降落与第一次起飞的时间差） T 为 18.5 小时。根据上图可知：

$$E_1 = \{e_{ad}, e_{bd}, e_{cd}, e_{di}^1, e_{di}^2, e_{df}, e_{dg}, e_{dh}\}, E_2 = \{e_{di}^1, e_{di}^2, e_{ik}\}, E_3 = \{e_{df}, e_{fk}\}$$

$$E_4 = \{e_{dg}, e_{gk}\}, E_5 = \{e_{dh}, e_{hk}\}, E_6 = \{e_{ik}, e_{fk}, e_{gk}, e_{hk}, e_{jk}, e_{kl}, e_{km}, e_{kn}\}$$

各航班节所需的时间 $\bar{t}_{ij} = t_{ij} + t_{ji} + GT$ ，具体如下：

表 4-5 A320 航班节时间表

航班节	\bar{t}_{ad}	\bar{t}_{bd}	\bar{t}_{cd}	\bar{t}_{di}^1	\bar{t}_{di}^2	\bar{t}_{df}	\bar{t}_{dg}	\bar{t}_{dh}
所需时间 (h)	4.84	4	4.59	9.42	9.83	4.17	2.92	9.42
航班节	\bar{t}_{ik}	\bar{t}_{fk}	\bar{t}_{gk}	\bar{t}_{hk}	\bar{t}_{jk}	\bar{t}_{kl}	\bar{t}_{km}	\bar{t}_{kn}
所需时间 (h)	4.84	4	4.59	9.42	9.83	4.17	2.92	9.42

将上述数据代入算法中进行计算，可以得到：

$$FJ = \{\{e_{cd}, e_{dh}, e_{dg}\}, \{e_{bd}, e_{df}, e_{di}^1\}, \{e_{ad}, e_{di}^2\}, \{e_{kl}, e_{km}, e_{kn}\}, \{e_{jk}, e_{gk}, e_{hk}\}, \{e_{ik}, e_{fk}\}\}$$

即在满足所有航线的条件下，所需要使用的 A320 型飞机数量最少为 6 架。在利益最大化的前提下制定航班计划，则航班计划具体为：

表 4-6 A320 航班计划表

航班号	航线全称	起飞时间	降落时间	起飞时间	降落时间	飞行小时
XX1599	西安-南昌-厦门	7:10	9:10	10:00	11:30	3.17
XX1600	厦门-南昌-西安	12:10	13:40	14:40	16:35	3.25
XX1533	西安-南京	17:15	19:10			1.94
XX1534	南京-西安	19:50	21:50			2.06
XX1645	西安-重庆	22:30	23:35			1.64
XX1646	重庆-西安	0:15	1:20			1.35
XX1647	西安-呼和浩特	7:00	8:35			1.35
XX1648	呼和浩特-西安	9:15	11:00			1.52
XX1663	西安-桂林	11:40	13:25			2.12
XX1664	桂林-西安	14:05	15:50			1.89
XX1437	西安-南充-三亚	16:30	18:55	19:30	20:35	3.42
XX1438	三亚-南充-西安	21:15	22:30	0:10	1:30	3.82
XX1649	西安-昆明	7:20	9:30			2.10
XX1650	昆明-西安	10:10	12:10			2.10
XX1667	西安-贵阳-三亚	12:50	14:35	15:25	17:25	4.10
XX1668	三亚-贵阳-西安	18:05	19:05	19:55	22:15	3.69
XX1627	天津-杭州	7:05	8:50			1.93
XX1628	杭州-天津	9:30	11:25			1.96
XX1657	天津-成都	12:05	14:50			2.87
XX1658	成都-天津	15:30	17:50			2.54
XX1661	天津-上海	18:30	20:25			1.96
XX1662	上海-天津	21:05	23:05			2.02
XX1669	天津-重庆	7:00	9:20			2.72
XX1670	重庆-天津	10:00	13:15			2.34
XX1689	天津-厦门	13:55	16:30			2.93
XX1690	厦门-天津	17:10	19:45			2.85
XX1603	天津-宁波	20:25	21:55			2.04
XX1604	宁波-天津	22:35	0:05			2.19
XX1583	天津-桂林	7:10	11:05			2.84
XX1584	桂林-天津	11:45	14:00			2.57
XX1681	天津-武汉-三亚	14:40	16:25	17:30	19:50	4.36
XX1682	三亚-武汉-天津	20:30	22:40	23:40	1:20	4.05

其中各飞机负责的航线和时刻表可以表示为：

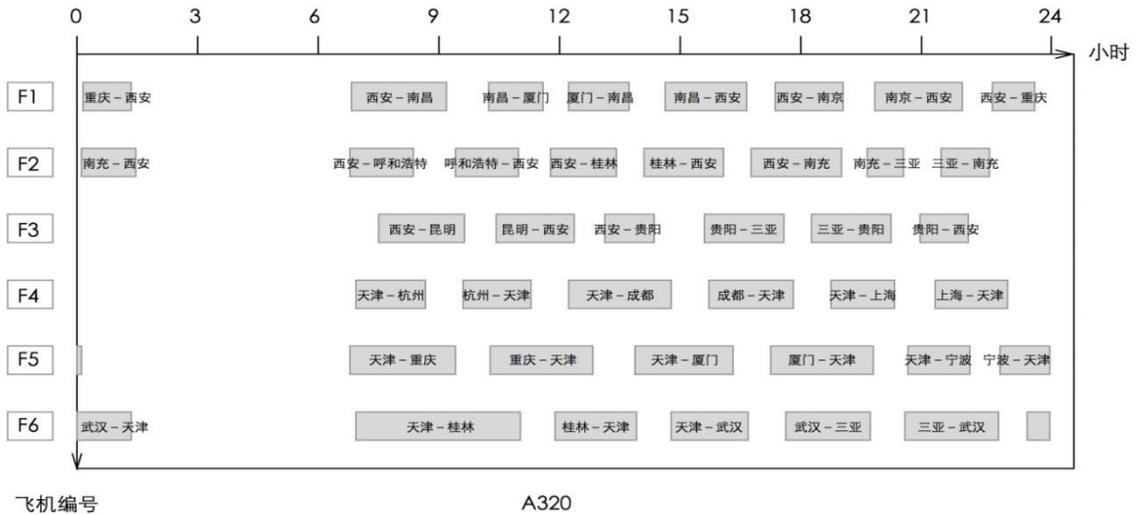


图 4-10 A320 航班计划时刻图

4.2.4 结果分析

在保证公司的运营稳定的前提下，我们分别针对两种机型的飞机提出了排班计划，该计划尽量满足了航空公司利益最大化的要求。

根据附件 1 中提供的数据，我们可以求得航空公司当月的盈利为 1985 万元，在重新制定航班计划后，航空公司的月盈利为 4254 万元，即在维持运营和不更改机型的条件下，航空公司的最大月盈利为 4254 万元，比原航班计划增加了 2269 万元。

4.3 考虑维修情况的飞机排班问题

4.3.1 规划模型的建立

根据问题二中求解出的航班计划，我们可以知道某种型号飞机的数量为 m_E ，各飞机每天的飞行时间 t_1, t_2, \dots, t_m (小时)。假设每架飞机均用一整天的时间进行维修，即从 0 点到 24 点。那么每架飞机的检修周期 \tilde{T}_m 为：

$$\tilde{T}_m = \left\lceil \frac{130}{t_m} \right\rceil$$

要求在不改变问题二中所求航班计划的情况下，要使航空公司正常营运，那么增加的飞机数量要使得在 \tilde{T}_z 天内公司都能正常运营， \tilde{T}_z 为 $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_m$ 的最小公倍数。

下面以飞机数量 m 作为行数， T_z 作为列数，构建矩阵 $D_{m \times T_z}$ ：

$$D_{m \times T_z} = \begin{matrix} & 1 & 2 & \dots & \tilde{T}_z \\ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1\tilde{T}_z} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2\tilde{T}_z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1} & S_{m2} & \dots & S_{m\tilde{T}_z} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

其中 S_{ij} 表示飞机 f_i 在第 j 天的状态, $S_{ij} = \{0,1,2\}$, 0 为飞行状态, 1 为维修状态, 2 为闲置状态。因为飞机飞行时间累积 130 小时必须进行维修, 但不到 130 小时也可进行维修, 所以讲 f_1 至 f_m 是按照各自检修周期 T_n 从大到小排列。在开始的时候, 将矩阵所有的状态值设置为 0, 然后逐行进行判断, 从第一行开始。初始设定用来替换的飞机数量为 1 架, 此时矩阵为 $m+1$ 行, 设替换飞机的初始状态为闲置状态 2。

$$D_{(m+1) \times T_z} = \begin{matrix} & 1 & 2 & \cdots & \tilde{T}_z \\ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{m+1} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

从第一行开始对飞机检修情况进行判定, 当飞机到达第一个维修周期时, 若该列存在状态值为 2 的飞机, 说明当天有飞机闲置, 则可以将飞机进行维修, 将其状态改为 1, 同时将闲置飞机的状态 2 改为 0, 更新矩阵。若该列不存在状态为 2 的飞机, 则将维修节点往前推一天再进行判定。若存在闲置飞机, 则进行维修, 更新矩阵; 否则再继续往前推一天进行判定。若一直推进到第一天都不存在闲置飞机进行替换, 则需要增加飞机, 即在矩阵中增加第 $m+2$ 行, 设置初始值为 2, 继续进行判定。对于每一行来说, 在进行维修替换并更新矩阵后, 每隔一个检修周期进行检修, 直到该行判定结束后进行下一行的判定。在完成 m 架飞机的判定后, 我们可以得到在使得航空公司正常营运的情况下, 至少需要增加的飞机数量。

4.3.2 模型的求解

在题目中提及航空公司每月末会根据当月航空公司的盈利情况对航班的编排进行调整, 因此我们在求解上述模型时仅考虑航空公司在 30 天内维持正常营运需要增加的飞机数量。下面针对 E190 和 A320 两种类型的飞机进行分析。

4.3.2.1 E190 型飞机的编排

在问题 2 的航班计划中, 总共使用了 6 架 E190 型飞机, 各飞机的维修周期分别为 19,15,10,10,10,9 天。根据上述的算法, 可以得到仅需增加 1 架飞机则可以完成编排工作, 具体的航班工作状态的编排如下图所示:

表 4-7 E190 型飞机状态安排表

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	1	0	0	0	0	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	2	2	1	2	0	2	0	0	0

其中 0 表示飞机正常运行, 1 表示飞机处于维修状态, 2 表示飞机处于闲置状态。

4.3.2.2 A320 型飞机的编排

在问题 2 的航班计划中，总共使用了 6 架 A320 型飞机，各飞机的维修周期为 11,10,10,10,10,9。根据上述的算法，可以得到仅需增加 1 架飞机则可以完成编排工作，具体的航班编排如下图所示：

表 4-8 A320 型飞机状态安排表

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0	2	2	1	2	0	0	0	0	0	2	0	1	2	2	0	0	0	0	0

4.3.3 结论

在不改变问题 2 中所求航班计划的情况下，要使航空公司正常营运，至少需要新增增加 E190 型飞机 1 架，A320 型飞机 1 架。

4.4 基于鲁棒性约束的飞机排班问题

在航班时刻设计中，提升鲁棒性的措施是增加过站时间裕度^[8]。该措施对计划成本的潜在影响时降低了飞机的利用率，增加了计划成本。

4.4.1 航班时刻的鲁棒性评价

航空公司生产计划的鲁棒性^[9]是指生产计划自身有一定的“抗干扰能力”，有一定容量可以自身进行调节从而减少航班延误和取消的发生，以及航班发生延误或取消等航班不正常情况时比较容易恢复正常。

对于鲁棒性的评价，有学者通过平均的航班衔接时间来体现^[10]。一般来说，航班的衔接时间越长，航班时刻的鲁棒性越好。虽然平均衔接时间可以从一定程度上体现鲁棒性，但是在评价过程中忽略了多个航班衔接的情况，即上一次的飞机延误对于下一次延误产生影响。为了进一步考虑航班延误影响的连续性，我们提出了平均延误概率来衡量鲁棒性，即每一航班飞机延误对下一衔接航班影响的概率的平均值。

根据附件 2 的统计数据，我们知道航空公司的延误统计数据为：

表 4-9 飞机延迟时间统计表

延误/min	[0, 15]	(15, 60]	>60
比例	55%	30%	15%

考虑到飞机过站有个最小的衔接时间 GT_{min} ，文中主要取 15 分钟^[11]，则航空公司航班衔接时间和延误概率的关系如下图所示：

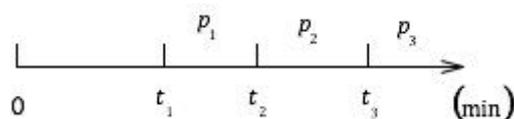


图 4-11 航班衔接时间-延误概率关系图

t 是航班的衔接时间, 其中 t_1 是航班的最小衔接时间 GT_{\min} , p_k 是航班衔接时间在 t_k 到 t_{k+1} 时间段内航班发生延误的概率, 当衔接时间大于 t_{k+1} 时, 延误概率均为 p_{k+1} 。那么飞机 i 在航线 j 中的延误概率可表示为:

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i), & n \geq 1 \end{cases}$$

其中: n 是航线 j 中航班 i 之前航班的衔接次数; $q_r = p_k$, 若此时的过站衔接时间处于区间 $(t_k, t_{k+1}]$ 。

计算两种机型的所有航班的可能延误概率, 然后求各自的平均值, 即:

$$P_d = \frac{\sum_{i=1, j=1}^{i=m, j=l_i} P_{ij}}{N}$$

其中 m 是飞机的数量, l_i 是第 i 架飞机运行的航班数, N 为同一型号的所有飞机运行的航班数的总和。

根据问题二中得到的航班计划, 我们可以计算出 E190 型飞机的平均延误概率:

$$P_d^{E190} = 72.1\%$$

同理, A320 型飞机的平均延误概率为:

$$P_d^{A320} = 73.4\%$$

A320 型的平均延误概率高于 E190 型飞机主要的原因是同一架 A320 型飞机需要运行的航班数量较多, 存在多次衔接情况, 若是中间某次航班出现延误情况, 会去后面的航班造成连续性影响。

显然, 平均延误概率的值越大, 说明航班计划的鲁棒性越差。由于在问题二中我们主要考虑的是需用飞机数量最小的原则, 因此进行了衔接时间的压缩, 导致航班计划的鲁棒性较差。若增加衔接时间, 可以有效提高航班计划的鲁棒性, 但同时会降低飞机的利用率, 从而增加了计划成本。

4.4.2 基于鲁棒性约束的飞机排班设计

在问题二中我们基于“需用飞机数量最小”的原则下进行排班, 即尽可能压缩了航班的衔接时间, 大大降低了航班计划的鲁棒性。为了提高航班计划的鲁棒性, 则需要增加飞机衔接时间, 进而增加飞机的数量, 即鲁棒性的提高与利益最大化之间是相互矛盾的。下面我们研究在一定的鲁棒性约束条件下对航班计划进行调整, 得到较合理的编排。

要使得鲁棒性较好, 则飞机的编排的衔接时间越大越好。然而, 在实际过程中需要考虑航空公司的计划成本, 故需要在兼顾鲁棒性的情况下尽可能用少的飞机。于是, 下

面我们提出几个排班原则：

- (1) **所需飞机尽可能少原则**：使用的飞机数量尽可能少，从问题二中的航班计划基础上增加。
 - (2) **鲁棒性合理原则**：鲁棒性只要在可接受范围内即可，因为并无不延迟的情况。
 - (3) **航班计划均衡性原则**：制定航班计划是尽量将衔接时间均匀分配，使得计划均衡性较强
 - (4) **最优航班原则**：最优航班计划要同时考虑鲁棒性和飞机数量两个因素
- 根据上述的原则我们进行航班编排和鲁棒性分析。

4.4.2.1 E190 型飞机排班设计

首先我们对 E190 型飞机进行讨论。根据问题二可知，完成所有航线的运行至少需要 6 架飞机。根据上述的四个原则，我们在增加飞机数量的基础上重新制定航班计划，分别计算出在飞机数量为 6,7,8,9,10 时的平均延误概率，结果如下表所示：

表 4-10 E190 飞机数量-平均延误概率关系表

飞机架数	6	7	8	9	10
平均延误概率	72.13%	58.32%	48.04%	37.05%	34.64%

显然，刚开始在增加飞机数量的过程中平均延误概率快速下降，即鲁棒性增强了。但在飞机数量达到 9 架时，再继续增加飞机，平均延误概率下降不明显。根据原则 4：最优航班计划要同时考虑鲁棒性和飞机数量两个因素，因此我们选取 9 架飞机时得到的航班计划为最优航班计划，具体为：

表 4-11 E190 考虑鲁棒性航班计划表

航班号	航线全称	起飞时间	降落时间	起飞时间	降落时间	飞行小时
XX1571	西安-天津-沈阳	7:00	8:55	10:05	11:30	3.13
XX1572	沈阳-天津-西安	12:10	13:35	14:20	16:10	3.60
XX1439	西安-武汉-福州	7:10	8:25	9:40	11:00	3.31
XX1440	福州-武汉-西安	12:15	13:50	15:05	16:45	3.57
XX1405	西安-长沙-汕头	7:05	9:05	10:20	11:40	3.41
XX1406	汕头-长沙-西安	12:55	14:30	15:45	17:35	3.70
XX1615	天津-青岛-温州	7:00	8:05	9:20	11:25	3.44
XX1614	温州-青岛-天津	12:40	14:30	15:45	16:55	3.14
XX1611	天津-郑州-桂林	7:20	8:50	10:05	12:10	3.66
XX1612	桂林-郑州-天津	13:25	15:30	16:45	18:10	3.47
XX1607	天津-临沂-福州	7:05	8:05	9:20	11:10	3.09
XX1608	福州-临沂-天津	12:25	14:15	15:30	16:30	3.16
XX1609	天津-郑州-南宁	7:30	8:50	10:05	12:35	4.12
XX1610	南宁-郑州-天津	13:50	16:15	17:30	18:50	3.91
XX1691	天津-三亚	7:10	11:10			4.22
XX1692	三亚-天津	11:50	15:10			4.17
XX1617	天津-阜阳-厦门	15:50	17:05	17:55	19:35	3.52
XX1618	厦门-阜阳-天津	20:15	21:55	22:40	0:00	3.38
XX1459	天津-黄山-海口	7:15	9:00	10:15	12:45	4.31
XX1460	海口-黄山-天津	14:00	16:00	17:15	19:15	4.38

4.4.2.2 A320 型飞机排班设计

根据问题二可知，完成所有航线的运行至少需要 6 架飞机。根据上述的四个原则，我们在增加飞机数量的基础上重新制定航班计划，分别计算出在飞机数量为 6,7,8,9,10 时的平均延误概率，结果如下表所示：

表 4-12 A320 飞机数量-平均延误概率关系表

飞机架数	6	7	8	9	10
平均延误概率	73.41%	58.33%	43.30%	31.09%	30.13%

显然，刚开始在增加飞机数量的过程中平均延误概率快速下降，即鲁棒性增强了。但在飞机数量达到 9 架时，平均延误概率为 31.09%，再继续增加飞机，平均延误概率仅下降了 1%。根据原则最优航班原则，我们选取 9 架飞机时得到的航班计划为最优航班计划，具体为：

表 4-13 A320 考虑鲁棒性航班计划表

航班号	航线全称	起飞时间	降落时间	起飞时间	降落时间	飞行小时
XX1599	西安-南昌-厦门	7:10	9:10	10:25	11:55	3.17
XX1600	厦门-南昌-西安	13:10	14:40	15:55	17:50	3.25
XX1533	西安-南京	19:05	21:00			1.94
XX1534	南京-西安	22:15	0:15			2.06
XX1645	西安-重庆	7:05	8:15			1.64
XX1646	重庆-西安	9:30	10:35			1.35
XX1663	西安-桂林	11:50	13:35			2.12
XX1664	桂林-西安	14:50	16:35			1.89
XX1647	西安-呼和浩特	7:00	8:35			1.35
XX1648	呼和浩特-西安	9:50	11:35			1.52
XX1437	西安-南充-三亚	12:50	14:05	15:20	17:40	3.42
XX1438	三亚-南充-西安	18:55	21:20	22:35	23:40	3.82
XX1649	西安-昆明	7:20	9:30			2.10
XX1650	昆明-西安	10:45	12:45			2.10
XX1667	西安-贵阳-三亚	14:00	16:05	17:20	19:20	4.10
XX1668	三亚-贵阳-西安	20:35	22:35	23:40	1:00	3.69
XX1627	天津-杭州	7:05	8:50			1.93
XX1628	杭州-天津	10:05	12:00			1.96
XX1583	天津-桂林	13:15	17:10			2.84
XX1584	桂林-天津	18:25	20:40			2.57
XX1657	天津-成都	7:15	10:00			2.87
XX1658	成都-天津	11:15	13:35			2.54
XX1661	天津-上海	14:50	16:45			1.96
XX1662	上海-天津	18:00	20:00			2.02
XX1669	天津-重庆	7:00	9:20			2.72
XX1670	重庆-天津	10:35	13:50			2.34
XX1689	天津-厦门	15:05	17:40			2.93

XX1690	厦门-天津	18:55	21:20			2.85
XX1603	天津-宁波	7:10	8:40			2.04
XX1604	宁波-天津	9:55	11:25			2.19
XX1681	天津-武汉-三亚	7:20	9:05	10:20	12:40	4.36
XX1682	三亚-武汉-天津	13:55	16:05	17:20	19:00	4.05

5 结论

5.1 问题一

在 52 条航线中有 7 条航线存在亏损，分别是西安-天津-沈阳、沈阳-天津-西安、天津-临沂-福州、福州-临沂-天津、天津-阜阳-厦门、厦门-阜阳-天津和呼和浩特-西安。影响航空公司收益的主要因素是实际票价水平和客座率，其中实际票价水平受全票价格和票价折扣率的影响。针对亏损的航线，我们提出以下整改措施：

- (1) 进行动态定价
- (2) 客座率较小的航线更换小型飞机运行
- (3) 提高客座率，适当进行机票超售

5.2 问题二

根据附件 1 中提供的数据，我们可以求得航空公司当月的盈利为 1985 万元。在保证公司的运营稳定的前提下，我们最小需要使用 6 架 E190 和 6 架 A320 飞机进行排班。在重新制定航班计划后，航空公司的月盈利为 4254 万元，即在维持运营和不更改机型的条件下，航空公司的最大月盈利为 4254 万元，比原航班计划增加了 2269 万元。

5.3 问题三

在不改变问题 2 中所求航班计划的情况下，要使航空公司正常营运，至少需要新增 E190 型飞机 1 架，A320 型飞机 1 架。

5.4 问题四

在鲁棒性约束条件下，对附件 1 中的航线重新制定航班计划。在最优的情况下，需要使用 9 架 E190 飞机，此时的飞机延误率为 37.05%，鲁棒性与问题二中航班计划相比提升了接近 1 倍。另外，A320 型飞机也需要使用 9 架，此时飞机延误率为 31.09%，鲁棒性与问题二中航班计划相比提升了接近 1.5 倍。

6 模型的优缺点

◆ 优点

(1) 引入图论来表示航班之间的衔接关系，将使用最少数量飞机完成编排的问题转换成了多邮递员遍历各路线的问题，并借鉴贪心算法提出了有效的遍历算法，成功地完成了在所需飞机数量最小地的条件下的飞机地排班问题。

(2) 当考虑飞机维修情况时，我们将维修周期转换为以天为单位，从而将问题简化成 0-1 指派问题，虽然存在一些误差，但是大大减少了计算的工作量，有效提高了排班效率。

(3) 在对航班计划鲁棒性的评价上，我们提出了平均延误概率这一指标，既保证

了延误的传递性，又能够保证在对鲁棒性进行优化时结果所呈现出来的直观化。另外在鲁棒性约束下设计最优航班计划时，我们综合考虑了鲁棒性和飞机数量两个因素，尽量在保证鲁棒性地前提下减少使用飞机地数量，从而有效减少计划成本。

◆ 缺点

- (1) 在对飞机重新排班后没有考虑餐费等成本的变化。
- (2) 部分航班客座率过低，可以将飞机换成座位数较少的机型，这样能够节约成本，但是本文并没有对这方面进行讨论。
- (3) 在针对问题三构建模型过程中，负责替换的飞机往往没有最大化其飞行时间就进行维修，对维修资源造成了一定程度的浪费。

7 问题的进一步讨论

针对论文中没有考虑到的问题以及模型的缺点，在下一步研究中我们可以针对以下方面进行一定改进。

(1) 把客座率较低的航班，如西安—呼和浩特航线，将原 A320 机型换为座位数较少的 E190 型飞机，这样在机组人员工资、航油费、起降费用和航材维修费等方面节约成本，整个航班计划的编排都会发生改变。

(2) 在对第三问的模型进行改进的过程中，要充分考虑替换飞机闲置的天数，以完成对飞行时间的最大化，提高维修资源的利用率。

(3) 进一步确定每一航班对应的各项成本，具体到人均成本，这样能够使最后的计算结果更精细。

参考文献

- 【1】 吴东华, 夏洪山. 基于航空公司成本最小化的飞机排班问题模型与算法[J]. 交通运输系统工程与信息, 2014, 14(1):109-116. DOI:doi:10.3969/j.issn.1009-6744.2014.01.018.
- 【2】 Kenneth D. Boyer, Principles of Transportation Economics[M]. New York: Addition Wesley Longman, Inc.
- 【3】 廖峰. 航空公司飞机智能化排班问题的研究[D]. 电子科技大学, 2010.
- 【4】 宋志敏. 航班飞机排班算法及其实现技术 [D]. 南京航空航天大学, 2008. DOI:doi:10.7666/d.d052513.
- 【5】 魏星. 飞机排班一体化优化模型与算法研究[D]. 南京航空航天大学, 2012.
- 【6】 于海波. 飞机排班算法的研究与实现 [D]. 南京航空航天大学, 2007. DOI:doi:10.7666/d.d037709.
- 【7】 周琨. 航空公司航班运行调度模型与算法研究[D]. 南京航空航天大学, 2012.
- 【8】 何敏. 航班计划的鲁棒性设计[D]. 南京航空航天大学, 2012.
- 【9】 接婧. 国际学术界对鲁棒性的研究[J]. 系统工程学报. 2005, 20 (2): 153- 154.
- 【10】 牟德一, 张宗贤. 基于航班延误概率的鲁棒性飞机排班模型[J]. 中國民航大學學報, 2010, 28:35-39. DOI:doi:10.3969/j.issn.1001-5590.2010.06.009.
- 【11】 孙宏, 杜文. 航空公司飞机排班问题的排序模型及算法 [J]. 系统管理学报, 2002, 11:244-247. DOI:doi:10.3969/j.issn.1005-2542.2002.03.016.

附录

问题二的程序代码 (Matlab)

```
%矩阵 a 是一个 20 乘 3 的矩阵，矩阵的每一行代表一条航线，3 个数字，
%其中第一个数字代表起飞城市，第二个代表降落城市，第三个数字代表飞行时
间 T
%b 同理
a=xlsread('1.xlsx','A1:C20');
b=xlsread('1.xlsx','E1:G32');

%%产生节点集合，(节点的度大于 2)
n1=size(a,1); n2=size(b,1);
c1=cell(n1/2,1); c2=cell(n2/2,1);
for k=1:n1/2
    c1{k,1}(1,1)=k;
end
for k=1:n2
    c2{k,1}(1,1)=k;
end
for j=1:n1/2
    p=1;
    for i=1:n1
        if a(i,1)==c1{j,1}(1,1)
            c1{j,1}(p,1)=a(i,1);
            c1{j,1}(p,2)=a(i,2);
            c1{j,1}(p,3)=a(i,3);
            p=p+1;
        end
    end
end
for j=1:n2/2
    q=1;
    %%
    for i=1:n2
        if (b(i,1)==c2{j,1}(1,1))
            c2{j,1}(q,1)=b(i,1);
            c2{j,1}(q,2)=b(i,2);
            c2{j,1}(q,3)=b(i,3);
            q=q+1;
        end
    end
end
end
```

```

m=n1/2;
c3=cell(6,1);
c3{1,1}='4-2-1'; c3{1,2}=17;
c3{2,1}='4-5-8'; c3{2,2}=17.5;
c3{3,1}='2-4-3'; c3{3,2}=16.66;
c3{4,1}='5-7-11'; c3{4,2}=18.26;
c3{5,1}='4-5-10'; c3{5,2}=15.17;
c3{6,1}='6-5-9'; c3{6,2}=16.17;
while(m>0)
    if (size(c1{m,1},1)==1)
        c1(m,:) = [];
    end
    m=m-1;
end
n=n2;
while(n>0)
    if (size(c2{n,1},1)==1)
        c2(n,:)=[];
    end
    n=n-1;
end
%%对上述产生的集合进行选择,选择的方法是从最小的集合开始选择最大的时间,
%与其相连的城市可选,指导路径的长度接近 18.5 为止
nn1=size(c1,1);
nn2=size(c2,1);
s=zeros(nn1,1);
for i=1:nn1
    s(i)=size(c1{i,1},1);
end
[value ii]=min(s);
t=0;
while(t<18.5)
    t=t+c1{i,1}(1,3);
end
disp(c3);

```

问题三的程序代码 (Matlab)

```

%矩阵中 0 表示正常飞行, 1 表示维修, 2 表示闲置
a=zeros(6,30);
T1=[11 10 10 10 10 9]; %6 架 A320 飞机各自维修周期
T2=[19 15 10 10 10 9]; %6 架 E190 飞机各自维修周期

```

```

n1=size(a,1);  n2=size(a,2);
b=zeros(1,30);
a1=[a;b];a2=[a;b];
for i=1:n1
    p=T1;q=T2;
    while (p(i)<=30)
        while(sum(a1(:,p(i)))>0)
            p(i)=p(i)-1;
        end
        a1(i,p(i))=1;
        p(i)=p(i)+T1(i);
    end

    while (q(i)<=30)
        while(sum(a2(:,q(i)))>0)
            q(i)=q(i)-1;
        end
        a2(i,q(i))=1;
        q(i)=q(i)+T2(i);
    end

end
for s=1:30
    while(sum(a1(:,s))==1)
        a1(7,s)=2;
    end
    if (a1(7,s)==0)
        a1(7,s)=3;
    end
    if (a1(7,s)==2)
        a1(7,s)=0;
    end
    if (a1(7,s)==3)
        a1(7,s)=2;
    end
    a1(7,16)=1;    a1(7,26)=1;
end
for s=1:30
    while(sum(a2(:,s))==1)
        a2(7,s)=2;
    end
end

```

```
    if (a2(7,s)==0)
        a2(7,s)=3;
    end
    if (a2(7,s)==2)
        a2(7,s)=0;
    end
    if (a2(7,s)==3)
        a2(7,s)=2;
    end
    a2(7,14)=1;    a2(7,26)=1;
end
fprintf(1,'下一个月 A320 飞机的排班为: ');
disp(a1);
fprintf(1,'下一个月 E190 飞机的排班为: ');
disp(a2);
```