

## 2015 湖南省研究生数学建模竞赛参赛承诺书

我们仔细阅读了湖南省研究生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权湖南省研究生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号是：**B 题**

我们的参赛报名号为：**201518001011**

所属学校：**国防科学技术大学**

参赛队员 (打印并签名)：1.

2.

3.

指导教师或指导教师组负责人(打印并签名)：

日期： 年 月 日

---

评阅编号（由组委会评阅前进行编号）：



# 湖南省首届研究生数学建模竞赛

题目

B 题 航班计划的合理编排

## 摘 要

航班计划的制定是航空公司十分关注的部分，涉及到航班的安全运行，提高航空公司的收益。本文的目的是合理安排某航空公司的航班计划，使得其收益最大化。

第一问中，通过分析附件一中的数据，本文求出了各个航班的收益情况，找出了存在亏损的航班。考虑到不同因素之间的量纲不同，本文首先将各个因素进行了归一化。为求得影响收益的主要因素，本文假设并验证了收益与各个因素成多元线性关系，并通过多元线性回归求得线性参数。通过比较所得参数，得出期望票价收入为影响收益的主要因素，航油费为次要因素，并建议亏损航班应着力提高客座率。

第二问中，首先绘制了该航空公司的航线图，并计算了每条航线的运行时间。模型的目的就是通过合理的安排和分配，使得租赁的飞机数量最少，从而使得航空公司的收益值最大。本文将问题转换成了 0-1 多背包问题，对两种机型分开讨论，比较了优化每架飞机的飞行航线数和优化每架飞机的工作时间这两种方法，根据题目的特性，利用改进的动态规划算法，优化了每架飞机的工作时间，并为每架飞机安排了飞机计划。最终求得需要额外租赁 4 台 A320 型飞机，收益约为 123.7 万元；需要额外租赁 2 台 E190 型飞机，收益约为 20.4 万元。

第三问中，首先计算出每架飞机能够连续工作的天数，根据天数对每架飞机进行排序，通过贪心算法，优先对连续工作天数少的进行安排，而后依次安排其它飞机。最后根据安排计划绘制甘特图。据图可以得出，需要增加 A320 型飞机和 E190 型飞机各 1 台。

第四问中，本文将延误情况分为了轻微延误，普通延误和严重延误三种，针对不同的机型，讨论了不同程度延误情况下航班计划的鲁棒性。本文定义时间裕度并计算了时间裕度的标准差，通过标准差，给出了不同的方案。在本文中，A320 型飞机需要通过租赁额外的飞机来减轻延误带来的影响；E190 型飞机需要更新航班计划来减轻延误带来的影响。

**关键词：**航班计划；多元线性回归；0-1 多背包；动态规划；贪心算法；时间裕度

## 1 问题重述与分析

航班计划是规定正班飞行的航线、机型、班次、和班期时刻的计划。正班飞行是按照对外公布的班期时刻表进行的航班飞行。在我国，正班飞行完成的周转量、运输量、大约占到全部航空运输周转量、运输量的 90% 左右。正班飞行的航线、机型、班次和班期时刻，实际上就是航空公司向社会承诺提供的航空运输服务产品，从这个意义上说，航班计划是组织与协调航空运输生产活动的基本依据。从飞机调配、空勤组排班、到座位销售、地面运输服务组织，航空公司运输生产过程的各个环节，都要依据航班计划进行组织与安排。科学地制定航班计划，有效的执行航班计划，是保证航空运输生产正常进行，进而实现企业发展目标的重要环节<sup>[1][8]</sup>。在本文中，我们主要对以下问题进行讨论：

问题一：对附件 1 中给出的数据进行航线收益分析，找出影响收益的主要因素，并根据你的分析结果提出针对亏损航线的整改措施。

分析：数据中的信息包括航班号、航线全称、机型、耗油量、飞机座位数、全票价、折扣率、客座率、飞行时间以及各项费用等。利用这些数据我们可以得到收益的计算公式。

我们考虑使用多元线性回归的方法分析收益与各个因素之间的关系。由于数据的量纲不同，我们对数据进行了归一化处理，并将收益值作为因变量，各个影响因素作为自变量，通过多元线性回归模型得到表达式，各个自变量所对应系数的绝对值大小作为我们判断这个因素是否主要的依据。

问题二：为简化问题，假定各航线的航班时刻可以根据需要变动，同时假定现有飞行航线和航空公司的营销能力是稳定的（航线、平均客座率、平均折扣率不变），请你为航空公司制定一份下个月的航班计划，使航空公司的收益最大化。

分析：航空公司运营的目的就是使其利益最大化，由题目可知，由于航空公司的运营能力比较稳定，其航线、平均客座率、平均折扣率均不变。另外，航空公司每趟航班的各个支出也不改变。因此，对于航空公司来说，合理安排各台飞机的飞行计划，使得飞机能够合理的被分到更多的航线是尤为重要的。我们分析附录 1 的数据，发现各航班的飞行时间的总和为 154.335 小时，超过 2 台 A320 飞机和 4 台 E190 飞机一天能够飞行的总时间。因此，为了保证每天各个航班能够正常的运行，该公司需要向专业航空租赁公司租赁飞机。这样一来，为了使该公司的利益最大化，就是需要合理安排飞机飞行班次，使得租赁的飞机数量最小化。在本问中，我们考虑使用背包问题来建立模型。

问题三：如果继续考虑满足飞机维修需要，即每架飞机累计飞行 130 个小时就必须在维修基地停车场维修一次，每次停车场时间为 24 小时。那么，在不改变问题 2 中所求航班计划的情况下，要使航空公司正常营运，至少需要新增加两种类型的飞机各多少架？

分析：首先应根据 130 小时的限定计算各飞机的实际最大飞行天数，要保证航班计划顺利实施则必须租借飞机，而租借最少的飞机即为最优，因此我们可以考虑使用贪心法进行求解。并且根据题目已知数据，没有直接能从天津到西安的航班，因此还需要适当的假设从而简化问题。

问题四：航班计划的“鲁棒性”是生产运行过程中需要考虑的一个重要因素，

即设定一定的时间裕度以便在出现某一航班延误时能够减少对后续航班的影响。根据附件 2 中给出的数据请你评价问题 2 中求得的航班计划的“鲁棒性”，并重新制定一个带有“鲁棒性”约束的最优航班计划。

分析：在本问中，要想检验我们在问题 2 中所得到的航班计划的鲁棒性，就需要考虑延迟对于飞机调度带来的影响，我们首先根据附录二中给出的数据计算了每个型号飞机的总延迟期望，得到期望值后，我们又计算了之前所得到的航班计划中每架飞机的时间裕度，通过对比这两个值来评价航班计划的鲁棒性，如果鲁棒性不好，还要对航空计划进行进一步的改进，改进的原则就是让同一型号各架飞机的时间裕度的标准差降低。

## 2 假设说明

1. 根据题目要求，在建模过程中我们不改变航线，不拆分航班，不取消航班，每天每条航线必须有飞机执行飞行任务。
2. 假设每条航线（往返两个航班）尽可能由一架飞机执行飞行任务。
3. 假设每个航班除了飞行时间和中转等待时间外，需要额外耗费 30 分钟时间来进行加油，物资补给和清扫等工作。
4. 假设飞机每天的工作时间是 07:00 到次日 02:00，共计 1140 分钟/天。
5. 租借飞机在中心城市天津和西安之间进行中转时利用已有航线不增加新的航线。
6. 假设飞机起飞的时间不会冲突，不考虑航空管制的情况。

## 3 符号说明

符号	说明
$x_0, y_1$	某航班的期望票价收入
$x_i (i=1,2\dots14)$	附录 1 中的数据项目
$y$	某航班的收益
$\beta_i (i=0,1\dots11)$	多元线性回归方程的常数及各偏回归系数
$T$	每架飞机的工作时间
$t[i]$	第 $i$ 条航线需要的时间
$f(i,j)$	对于前 $i$ 个航线,飞机能够工作时间为 $j$ 时,能够安排的最大航线数
$d_k$	第 $k$ 架飞机的连续工作天数
$d_k'$	第 $k$ 架飞机的连续工作天数向下取整

## 4 模型的建立、求解与应用

### 4.1 问题 1

#### 4.1.1 模型的建立

第一问中提到了航线的收益以及影响收益的主要因素，结合题目所给的数据项目以及对数据的分析和处理，我们构建模型的过程如下：

(1) 收益的定义与计算方法：

首先我们将题目所给的数据项目用字母来进行表示：

表 4-1 数据项目的字母表示

字母	含义
$y$	某航班的收益
$y_1$	某航班的期望票价收入
$y_2$	某航班的支出
$x_1$	飞机座位数
$x_2$	全价票价格
$x_3$	平均折扣率
$x_4$	客座率
$x_5$	机组人员工资
$x_6$	航油费
$x_7$	起降及非航空性业务费
$x_8$	餐食
$x_9$	机供品
$x_{10}$	保险费、旅客责任险
$x_{11}$	航材消耗
$x_{12}$	不正常航班费用
$x_{13}$	航材维修费
$x_{14}$	发动机维修费

某个航班的收益可以宏观地定义为期望票价收入减去支出，在本题中，结合所给数据以及字母表示，我们定义期望票价收入的构成为：

$$y_1 = \prod_{i=1}^4 x_i$$

定义支出的构成为：

$$y_2 = \sum_{i=5}^{10} x_i$$

即我们的收益定义为：

$$y = y_1 - y_2 = \prod_{i=1}^4 x_i - \sum_{i=5}^{10} x_i$$

(2) 多元线性回归模型:

在多元线性回归模型中一共有  $m+1$  个变量, 其中 1 个因变量,  $m$  个自变量, 回归模型的一般形式为:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_m X_m + e$$

上式表示数据中因变量  $Y$  可以近似地表示为自变量  $X_1, X_2, \dots, X_m$  的线性函数。 $\beta_0$  为常数项,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  为偏回归系数, 表示在其它自变量保持不变时,  $X_j$  增加或减少一个单位时  $Y$  的平均变化量,  $e$  是去除  $m$  个自变量对  $Y$  影响后的随机误差。

多元线性回归模型使用的条件是  $Y$  与  $X_1, X_2, \dots, X_m$  之间具有线性关系且各个观测值相互独立, 另外还有残差  $e$  服从标准正态分布。

(3) 本问中多元线性回归模型的建立:

在本问中, 由于  $x_1, x_2, x_3, x_4$  之间存在内在联系, 与因变量  $y$  不成线性关系, 所以我们将  $x_1, x_2, x_3, x_4$  相乘, 得到一个新的自变量  $x_0$ , 即

$$x_0 = \prod_{i=1}^4 x_i$$

这里的  $x_0$  实际上代表的就是期望票价收入, 经过这样的处理, 以上条件在本问中均可满足。本问的多元线性回归模型建立为:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_0 + \beta_2 x_5 + \beta_3 x_6 + \dots + \beta_{11} x_{14}$$

#### 4.1.2 模型的求解

通过计算, 我们得到了各个航班的收益值, 其中部分航班的情况展示如下, 其余结果见附录 1:

表 4-2 航班收益情况

航班	收益值 (元)	备注
厦门-天津	137216.36	盈利
西安-重庆	57698.77	盈利
天津-郑州-南宁	33093.30	盈利
.....		
呼和浩特-西安	-1510.96	亏损
西安-天津-沈阳	-5632.46	亏损
福州-临沂-天津	-22920.04	亏损
沈阳-天津-西安	-27788.19	亏损
天津-临沂-福州	-30110.34	亏损
天津-阜阳-厦门	-33768.11	亏损

由于附件一中各个项目的量纲不同，所以我们对各项数据进行了归一化处理，归一化处理的方法为将每一列的数据的最大值设定为 1，最小值为 0，其他数据按照比例化为 0 到 1 之间的数，即：

$$x'_i = \frac{x_i - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}$$

其中， $x_i$  为原始数据， $x'_i$  为归一化后的数据， $x_{max}$  为该因素中的最大数据， $x_{min}$  该因素中的最小数据。

经过 SPSS 软件处理，我们得到了各个因素的偏回归系数如下：

$$\beta_0 = 0.1868, \beta_1 = 1.0135, \beta_2 = -0.0289, \beta_3 = -0.2824, \beta_4 = -0.0681,$$

$$\beta_5 = -0.0183, \beta_6 = -0.0044, \beta_7 = -0.0002, \beta_8 = -0.0218,$$

$$\beta_9 = -0.0218, \beta_{10} = -0.0173, \beta_{11} = -0.0222.$$

同时得到均方差为  $1.40745888862 \times 10^{-15}$ ，几乎为 0， $R^2$  值为 1，说明了模型符合线性分布。

通过对比各偏回归系数的绝对值，我们可以发现  $\beta_1$  的绝对值最大， $\beta_3$  的数值次大，故影响收益最为主要的因素为  $x_0$ ，即期望票价收入；次主要的因素为  $x_6$ ，即航油费。

### 4.1.3 结果分析

由于期望票价收入  $x_0$  中包括四个因素，所以我们要对这四个因素进行进一步的分析：其中  $x_1$  代表飞机座位数， $x_2$  代表全价票价格， $x_3$  代表平均折扣率， $x_4$  代表客座率。由于飞机的座位数和全价票价格不会轻易发生变化，所以其中对收益影响较大的是平均折扣率和客座率。

在与收益负相关的因素里，航油费的偏回归系数的绝对值明显大于其他各个因素，说明了航油费是次主要因素。

通过计算收益，我们得到如下亏损航线：西安-天津-沈阳，天津-临沂-福州，天津-阜阳-厦门，呼和浩特-西安。我们观察到每条亏损线路所存在的问题如下表所示：

表 4-3 亏损线路及其存在问题

编号	线路	问题
1	西安-天津-沈阳	票价略高，客座率略低
2	天津-临沂-福州	票价虽然低廉但是客座率较低，表示这条线路对顾客吸引力不够
3	天津-阜阳-厦门	票价十分低廉，但是客座率没有达到与之对应的高度，且这条航线的机组人员工资也偏高
4	呼和浩特-西安	票价虽然低廉但是客座率较低，表示这条线路对顾客吸引力不够

通过分析，不难发现，除了航线 1，其他几条航线存在一个共性问题就是虽然票价很低，但客座率对应如此低廉的票价并没有维持在一个很高的水平，导致

期望票价收入不及支出<sup>[2]</sup>。针对这种航线，我们给出的整改措施是：

- (1) 航空公司可以将航线 2,3,4 打造成精品旅游线路，利用低价促销或者与旅游社合作推出优惠产品等方法来吸引更多的旅客，真正能做到薄利多销，以这种方法将客座率维持在一个很高的水平；
- (2) 对于航线 3 这种客座率处于百分之八十左右的航线，可以利用促销等手段提高客座率，同时因为机组人员的工资水平已经很高了，所以可以在提高服务质量这方面下功夫，甚至可以提供买往返机票赠送景点门票、酒店、租车等服务，以好的口碑吸引更多的游客。

那么，对于线路 1 这种偏商务型的航线来说，票价已经处于一个比较高的水平，降低票价并不一定是明智之选，降价的效果不如提高准点率、乘机舒适度以及提供交通、酒店等附加服务的效果好。通过这样的措施才可以更有效的提高客座率<sup>[3]</sup>。

对于航油费来说，由于飞机飞行的线路不能轻易地改变，所以如果想降低航油费这个方面的支出，航空公司除了要在航班规划上做出调整，提高航油的使用效率，还要尽可能地进行科技研发，提高航油的质量或者寻找航油的一些替代品等，以此来减少这部分的花销<sup>[4]</sup>。

## 4.2 问题 2

### 4.2.1 模型的建立

第二问中，我们分析附录 1 的数据，若要保证每天各个航班能够正常的运行，那么该航空公司就必须租赁飞机，那么为了使该公司的利益最大化，我们就需要合理安排飞机飞行班次，使得租赁的飞机数量最小化。这一问中，我们构建模型的过程如下：

#### (1) 航线运行时间的定义以及航线可视化：

根据附录一，为了更加清晰的分析问题，我们忽略经停站点，将每一趟航班的起飞城市和落地城市画成坐标点，若它们之间有航班则画成有向边，边的权即对应航线的运营时间。每条航线运营时间的计算方法是：将每个航班的降落时间减去起飞时间得到一个时间间隔，每个航班再加上 30 分钟的时间用来进行维护，转场，清扫等活动，每条航线包括两条航班，所以每条航线的运营时间都要将往返的航班时间相加。例如：西安-长沙-汕头这条航线，由西安飞往汕头时，起飞时间为 9:30，降落时间为 13:30，时间间隔为 240 分钟，加上机动时间 30 分钟，共计 270 分钟，同理可得由汕头飞往西安的时间为 280 分钟，所以西安-长沙-汕头这条航线的运行时间就为 550 分钟。

根据以上所述运行时间的计算方法以及航线分布，我们可以得到 A320 飞机的航班运行图如下：

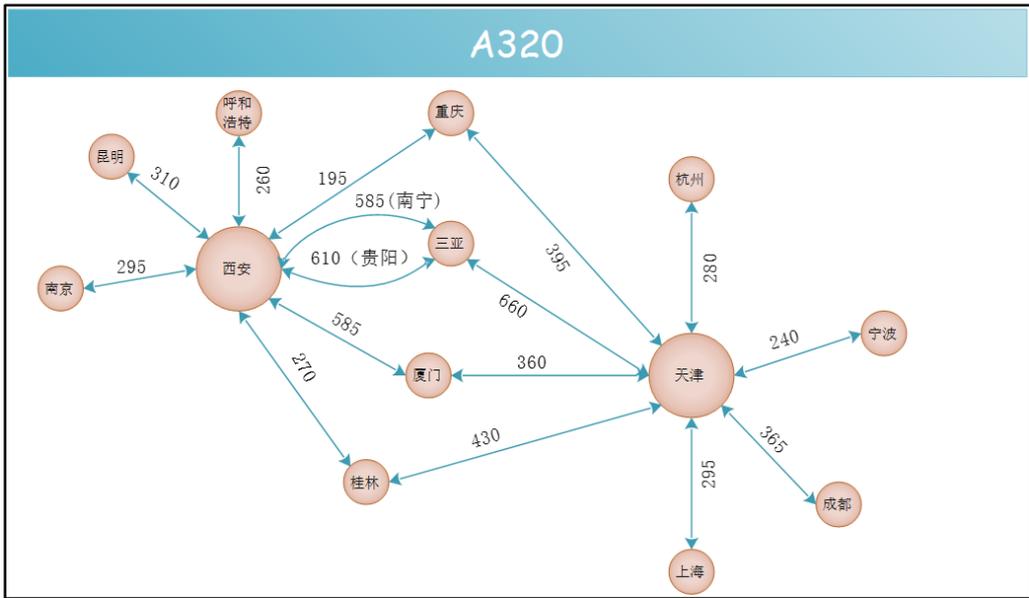


图 4-1 A320 飞机航班运行图

可以看出，西安与天津市航线中心城市。其中，西安的出入度（即关联的航线数）为 8，关联城市分别为南京、昆明、呼和浩特、重庆、三亚、厦门、桂林，其中有两条航 8 线到达三亚，分别经停贵阳和南宁；天津的出入度为 8，关联城市分别为重庆、三亚、厦门、桂林、杭州、上海、成都、宁波。并且，西安和天津之间可以通过重庆、三亚、厦门、桂林连通。

同理，E190 飞机的航班运行图如下：

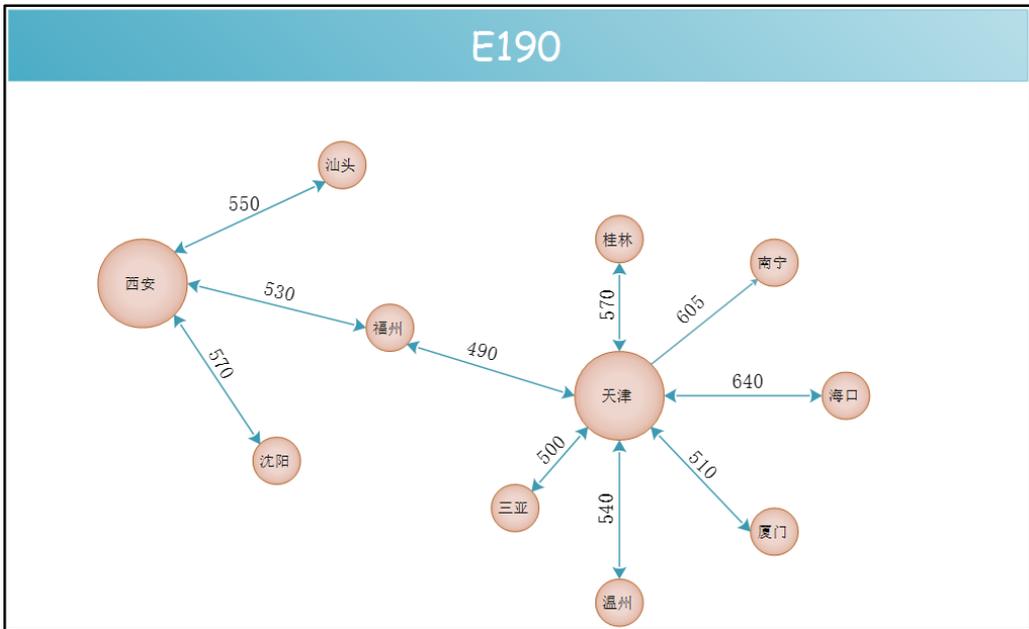


图 4-2 E190 飞机航班运行图

从上图可知，西安和天津市航线中心城市。其中，西安出入度为 3，关联城市分别为汕头、福州、沈阳；天津出入度为 7，关联城市为福州、桂林、南宁、海口、厦门、温州、三亚。并且，两中心城市有且仅有通过福州关联。

## (2) 0-1 背包问题与动态规划:

背包问题<sup>[5]</sup>是一类组合优化问题。问题可以描述为: 给定一组物品, 每种物品自身有重量和其代表的价值, 在限定的总重量内, 要使得所选择物品的总价值最大。而 0-1 背包问题就是每种物品的数量只有一件, 该物品要么被选择(为 1), 要么不被选择(为 0)。

0-1 背包问题是一个非常经典的问题, 虽然普通的贪心算法能够得到很好的解, 但是贪心算法容易陷入局部最优解。通常, 0-1 背包问题可以通过搜索算法解, 但是搜索算法通常时间复杂度较高, 因此, 当规模比较大的时候, 求解算法的时间效率较低。目前为止, 0-1 背包问题的有效解法就是通过动态规划求解<sup>[6]</sup>。

动态规划<sup>[7]</sup>是运筹学的一个分支, 是求解决策过程最优化的数学方法。动态规划并不是一种特殊的算法, 而是解决最优化问题的一种途径、一种方法。在最优化问题中, 往往会有很多可行解, 但是我们只想找到最优值的解, 动态规划往往是针对一种最优化问题, 由于各种问题的性质不同, 确定最优解的条件也互不相同, 因而动态规划的设计方法对不同的问题, 也有不同的解题方法。

## (3) 本问中背包问题模型的建立:

假设飞机每天的工作时间是 07:00 到次日 02:00, 共计 1140 分钟/天, 机务部门的目的是使得飞机能够每天执行更多航线的任务, 或者是使得每架飞机能够充分利用其工作时间。如果将每台飞机的工作时间定义为一个时间容量, 而将每一条航线作为单位价值, 那么每台飞机的航班安排可以转换为 0-1 背包问题。那么, 多台飞机的安排就是 0-1 多背包问题。下面, 本文将从两个方面讨论如何优化安排每台飞机的飞行计划。

### a) 优化每架飞机的飞行航线数

为了优化每架飞机的飞行航数, 就是使得每架飞机能够飞行的航线数量最多, 假设每架飞机的工作时间为  $T$ 。如果将航线数量编号, 第  $i$  条航线需要的时间为  $t[i]$ 。其中  $t[i]$  包括该航线往返时间, 物资补给时间, 飞机调度起飞时间等等。假设对于前  $i$  条航线, 飞机能够工作时间为  $j$  时, 能够安排的最大航线数是  $f(i, j)$ , 则可以得到动态规划的转移方程为:

$$f(i, j) = \max\{f(i, j - t[i]) + 1, f(i - 1, j)\}$$

$$f(i, j) = 0, \text{当 } i = 0, j \leq 0 \text{ 时}$$

该转移方程表示的是, 对于某一个飞机来说, 要么分配第  $i$  条航线给该飞机, 要么不分配第  $i$  条航线给该飞机。如果分配该航线, 则该飞机能够运营的航线数在前  $i-1$  航线中能够运行的航线数上再加 1, 为  $f(i, j-t[i])+1$ , 如果不分配该航线, 则该飞机能够运营的航线数和前  $i-1$  条航线能够运行的航线数相同, 为  $f(i-1, j)$ 。而每次的决策, 就是在两者之间选择最大值。

### b) 优化每架飞机的工作时间

定义飞机每天运行航班的工作时间总和为实际工作时间。由于每架飞机每天的工作时间是有限的, 我们应该尽可能的使得尽量利用飞机的工作时间, 减少飞机在工作时间内的闲置时间。那么我们也可以使得飞机的实际工作时间最大化。

类似的, 我们可以列出动态转移方程:

$$f(i, j) = \max\{f(i, j - t[i]) + t[i], f(i - 1, j)\}$$

$$f(i, j) = 0, \text{当 } i = 0, j \leq 0 \text{ 时}$$

该转移方程与上述方程唯一的不同就是将价值改成了航线的需求时间。对于

某一个飞机来说, 要么分配第  $i$  条航线给该飞机, 要么不分配第  $i$  条航线给该飞机。如果分配该航线, 则该飞机在前  $i-1$  条航线中的总的实际工作时间加上第  $i$  条航线需要的时间, 为  $f(i, j-t[i])+t[i]$ , 否则, 该飞机的实际工作时间和前  $i-1$  条中的总实际工作时间相同, 为  $f(i-1, j)$ 。而每次决策就是在两者之间选择最大值。

c) .需要注意的几个事项

实际情况中, 通过考虑, 我们发现每架飞机每天能够执行的航线数量比较少, 具有相同航线数量的方案数量很多。因此, 通过优化每架飞机的工作时间更加容易和高效。

在求得的航线中, 可能会出现不满足实际条件的情况, 即该几条航线不能够形成连通子图, 而对于该种情况, 实际中一台飞机不能满足该条件。因此该飞行计划不合理。假设该飞行计划的需求总时间为  $T'$ 。

由于动态规划的解全局最优解, 一旦  $T'$  不满足条件, 那么时间  $T'$  到时间  $T$  中均没有可以满足计划的方案, 因此, 我们令  $T=T'-1$ , 再通过动态方法求得最优方案。如此反复, 直到求出满足实际条件的最优方案。

在我们的程序执行过程中, 首先为第一台飞机分配航线, 其次为第二台飞机分配航线, 依次增加飞机数量, 直到所有航线都被分配完毕。对于航空公司来说, 超过数量的飞机需要去租赁公司租赁。若有多余的飞机, 则可以租借给其他公司。

#### 4.2.2 模型的求解

将上述模型进行编程实现, 我们得到 A320 型飞机的航班计划如下表所示:

表 4-4 A320 型飞机航班计划表

飞机来源	序号	航线	航线全称	航线运营时间 (min)	航线飞行时间 (h)	飞机总运营时间 (min)	飞机总飞行时间 (h)	连续工作天数 (天)	收益 (元)
拥有	第一架	XX1689(XX1690)	天津-厦门	360	5.773	1120	16.237	8.0	492084
		XX1657(XX1658)	天津-成都	365	5.404				
		XX1669(XX1670)	天津-重庆	395	5.06				
	第二架	XX1647(XX1648)	西安-呼和浩特	260	2.87	1115	14.127	9.2	236614
		XX1663(XX1664)	西安-桂林	270	4.011				
		XX1437(XX1438)	西安-南充-三亚	585	7.246				
租赁	第三架	XX1645(XX1646)	西安-重庆	195	2.986	1115	14.976	8.7	306299
		XX1649(XX1650)	西安-昆明	310	4.2				
		XX1667(XX1668)	西安-贵阳-三亚	610	7.79				
	第四架	XX1583(XX1584)	天津-桂林	430	5.413	1090	13.823	9.4	313161
		XX1681(XX1682)	天津-武汉-三亚	660	8.41				
	第五架	XX1533(XX1534)	西安-南京	295	2.999	880	9.416	13.8	93062
		XX1599(XX1600)	西安-南昌-厦门	585	6.417				
	第六架	XX1603(XX1604)	天津-宁波	240	4.223	815	12.085	10.7	59549
		XX1627(XX1628)	天津-杭州	280	3.89				
XX1661(XX1662)		天津-上海	295	3.972					

对于上表，有如下解释：

由上表看出，航空公司需要再租赁 4 架 A320 型飞机，加上航空公司本来拥有的 2 架 A320 型飞机，共有 6 架 A320 型飞机投入使用。

值得注意的是，每架飞机所安排飞行的航线如上表所示，每架飞机所飞行的航线顺序是可调整的，并不是按照表格中的航线顺序进行，并且相邻航线的时间间隔可以根据实际情况适当的延长或缩短。具体的飞行时间和顺序可以由航空公司来机动调整。这样可以使得航线安排的灵活性更大。

表格中航线运营时间的计算方法如上文所述，每条航线的飞行时间是由往返两个航班的飞行时间相加而得。

表中连续工作天数的计算方法为：题目中给出飞机累计飞行 130 个小时就必须在维修基地停场维修，所以用 130 除以飞机的总飞行时间即可得到连续工作天数，我们设第  $k$  架飞机的连续工作天数为  $d_k$ ，飞机总飞行时间为  $t_k$  即：

$$d_k = 130/t_k$$

计算本航空计划的收益过程如下：

题目中所给 A320 型飞机租赁费用为 33 万美金/月架，经过换算可得租赁费用为 66000 元/天架。则 A320 型飞机本航空计划的日收益为：

$492084+236614+306299+313161+93062+59549-66000*4=1236769$  元，约等于 123.7 万元。

E190 型飞机的航班计划如下表所示：

表 4-5 E190 型飞机航班计划表

飞机来源	序号	航线	航线全称	航线运营时间 (min)	航线飞行时间 (h)	飞机总运营时间 (min)	飞机总飞行时间 (h)	连续工作天数 (天)	收益 (元)
拥有	第一架	XX1607(XX1608)	天津-临沂-福州	490	6.246	1130	14.934	8.7	-14607
		XX1459(XX1460)	天津-黄山-海口	640	8.688				
	第二架	XX1405(XX1406)	西安-长沙-汕头	550	7.105	1120	13.839	9.3	73041
		XX1571(XX1572)	西安-天津-沈阳	570	6.734				
第三架	XX1617(XX1618)	天津-阜阳-厦门	510	6.894	1115	14.925	8.7	-16351	
	XX1609(XX1610)	天津-郑州-南宁	605	8.031					
第四架	XX1614(XX1615)	温州-青岛-天津	540	6.576	1110	13.701	9.5	63814	
	XX1611(XX1612)	天津-郑州-桂林	570	7.125					
租赁	第五架	XX1439(XX1440)	西安-武汉-福州	530	6.882	530	6.882	18.9	32937
	第六架	XX1691(XX1692)	天津-三亚	500	8.39	500	8.39	15.5	165109

对于上表，有如下解释：

由上表看出，航空公司需要再租赁 2 架 E190 型飞机，加上航空公司本来拥有的 4 架 E190 型飞机，共有 6 架 E190 型飞机投入使用。其余解释与表 4-3 相同。

同样，上述安排中，每架飞机执行航线任务的顺序和时间可以灵活的进行调整。

计算本航空计划的收益过程如下：

题目中所给 E190 型飞机租赁费用为 25 万美金/月架，经过换算可得租赁费用为 50000 元/天架。则 E190 型飞机本航空计划的日收益为：

$-14607+73041-16351+63814+32937+165109-50000*2=203943$  元，约为 20.4 万元。

### 4.3 问题 3

#### 4.3.1 模型的建立

本问要求我们考虑飞机的维修，即要求飞机在至多飞行 130 小时后必须进行维修，在第二问中我们已经计算了各架飞机在此范围内的有效工作天数  $d_k$ ，考虑到实际安排中飞机航线安排以天作为基本单位，因此我们对天数进行向下取整，即：

$$d'_k = \lfloor d_k \rfloor$$

得飞机的有效运行天数为：

表 4-6 飞机飞行有效天数

	第一架	第二架	第三架	第四架	第五架	第六架
A320	8	9	8	9	13	10
E190	8	9	8	9	18	15

由于航线不能改变，此时要使得公司正常运行，就要租借飞机，并且租借飞机数量最小时即为最优方案。本问将采用贪心法进行求解。

假设每个月的时间为 31 天，飞机至多运行有效天数之后必须停机 1 天进行维修，维修地点定在西安或者天津。由于维修存在停机情况，因此为保证航班的正常运行，每种机型至少再需要 1 台或更多飞机。

贪心算法的描述如下：

步骤 1：针对维修地点在天津和西安的不同飞机，根据有效运行天数从小到大的顺序排序。首先设定需要增加 1 台飞机。

步骤 2：取有效运行天数最小的飞机，首先对其进行安排。

步骤 3：依次对每个飞机进行安排，如果遇到与已安排飞机维修时间重叠，则向后调整飞行时间一天，重复调整直到不会出现时间重叠为止。若不存在满足的条件，则需要的飞机数量加 1。

步骤 4：重复步骤 3 直到所有飞机安排完毕。

### 4.3.2 模型的求解

经过求解，我们用甘特图来表示一种可行的结果，如图 4-3 所示：

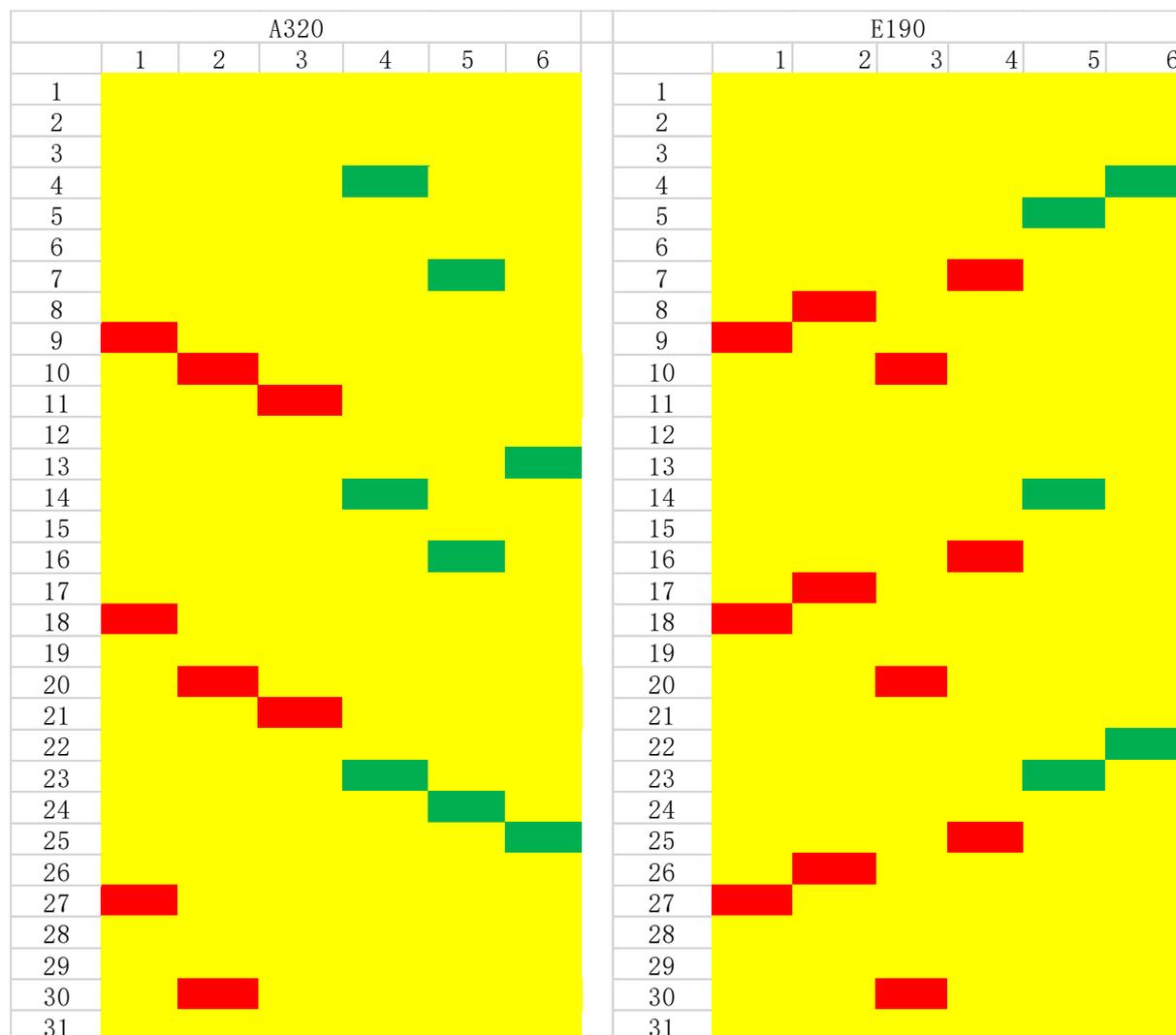


图 4-3 维修安排调度图

图 4-3 中，纵轴表示天数，单位为天 ( $d$ )，横轴表示飞机的编号，这里，我们将飞机重新编号，按照先天津后西安，先运行时间短的飞机后运行时间长的顺序进行编号为 1,2,3,4,5,6；涂色分为三种颜色，其中，黄色代表第二问中不考虑维修时飞机的正常使用，红色代表租用飞机在天津站代替正常飞机使用，绿色代表租用飞机在西安站代替正常飞机使用。图的左侧为 A320 型飞机，右侧为 E190 型飞机。

下面就问题实际操作中我们所规定的原则进行说明：

- 1) 考虑到租借飞机可以任意调配，但为了减少飞机调度次数，从而减少成本，应减少租借飞机在中心城市之间的调度次数，因此我们采取先安排某一中心城市所有航班的策略。实际操作中，我们按照先天津后西安的顺序进行安排。
- 2) 考虑到实际调度过程中飞机需要一定的时间，因此要求调度飞机在中心城市转场时至少需要两天的时间。例如，在 A320 型飞机中，维修飞机在第 7 天于西安站开始工作，第 8 天转场到天津站，第 9 天于天津站进行工作。而后

至第 12 天转场至西安站继续进行工作。由结果中可以容易看出，相邻两天工作的维修替代飞机（即纵向相邻红色绿色）均至少有一天的转场时间。

- 3) 考虑到有效飞行时间短的飞机需要更多次的维修次数，因此优先排班。实际操作中，我们就是将飞机进行了重新的编号。
- 4) 租借的飞机也必须要考虑有效飞行时间，这里取为当前飞机的最小有效时间 8 天。

由结果可以看出，在 A320 排班表中，维修飞机从第 7 天连续工作至第 14 天（其中第 8 天和第 12 天转场），一共工作了 8 天，而后停止工作了一天。此外的工作排班均未高于 8 天，模型有效。

- 5) 为满足上述原则，我们认为飞机不必工作至最大飞行时间而可以提前进入维修阶段。例如 A320-5，最大工作时长为 9 天，但最终实际安排为：

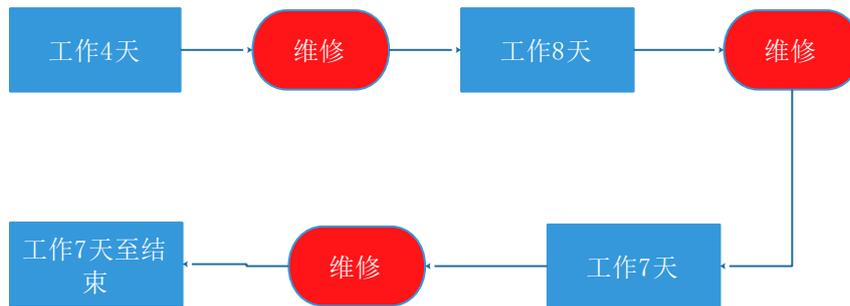


图 4-4 飞机的实际安排

综上，模型可以很好的解决需要维修这个问题，而且对于两种机型，我们均只需要再租借一台飞机即可满足需求。

#### 4.4 问题 4

航班由于多方面原因，经常会导致延误，航班延误的主要原因有天气原因、航空交通管制、机械故障、旅客原因、飞机调配等等。因此，航空公司在指定航班计划的时候需要考虑到延误等这个因素。为航班保留相应的时间裕度，下面，本文将针对不同情况下的延误情况对我们问题二中制定的航班计划进行分析。

附件二中给出了航班延误的统计表：

表 4-7 航班延误统计表

延误/min	[0,15]	(15,60]	>60
比例	55%	30%	15%

我们定义上表延误时间分别为轻微延误，普通延误和严重延误，对于每种延误，假设期望延误时间分别为 7.5 分钟，37.5 分钟和 120 分钟。

在本问中，我们定义时间裕度为飞机最大工作时间减去其实际每天工作时间。

为了考虑时间设计的鲁棒性，我们计算出各飞机的时间裕度。如上文所述，该飞机的最大工作时间为 07:00 到次日 02:00，共计 1140 分钟/天，通过计算，得出下表：

表 4-8 各飞机的时间裕度

型号	第一架	第二架	第三架	第四架	第五架	第六架	均方差
A320	20	25	25	50	260	325	137.5045
E190	10	20	25	30	610	640	311.9896

#### 4.4.1 轻微延误

对于 A320 飞机来说，如果遭遇了轻微延误。由于该机型每天最多安排了 3 条航线（6 个航班），则该飞机在轻微延误的情况下可能遭遇的延误时间为 0~90 分钟，期望延误时间为 45 分钟。在这种情况下，第 1-3 架飞机可能会产生调度时间问题，第 4-6 架飞机不受影响。

同理，对于 E190 型号的飞机来说，如果其遭遇了轻微延误。由于该机型每天最多安排了 2 条航线（4 个航班），该飞机一天的延误时间范围在 0~60 分钟，期望延误时间为 30 分钟。第 1-3 架飞机可能会产生调度时间问题，第 4-6 架飞机不受影响。

在这种情况下，航空公司可以考虑适当增加飞机的工作时间来缓解延误带来的压力。另外一个方法就是调整前 3 架的航班计划，使得前 3 架飞机的时间裕度更大。

#### 4.4.2 普通延误

对于 A320 飞机而言，遇到普通延误的情况时，由于该机型每天最多安排了 6 个航班，则该飞机在普通延误的情况可能遭遇的延误时间范围为 90~360 分钟，期望延误时间为 225 分钟，在这种情况下，第 1-4 架飞机会产生调度时间问题，第 5-6 架飞机不受影响。

同理，对于 E190 型号的飞机来说，如果遇到普通延误的情况，由于该机型每天最多安排了 4 个航班，则该飞机在普通延误的情况可能遭遇的延误时间范围为 60~240 分钟，期望延误时间为 150 分钟，在这种情况下，第 1-4 架飞机会产生调度问题，第 5-6 架飞机不受影响。

在这种情况下，飞机的调度会产生很大的问题，如果不是因为极端天气的原因，航空公司可以考虑用时间裕度很大的飞机来暂时缓解延误问题，或者根据历史延误情况，备用 1-2 架飞机，同时安抚旅客情绪，避免骚乱。

#### 4.4.3 严重延误

对于 A320 飞机而言，遇到严重延误的情况时，由于该机型每天最多安排了 6 个航班，则该飞机在普通延误的情况可能遭遇的延误时间范围会大于 360 分钟，期望延误时间为 720 分钟，在这种情况下，所有飞机都会产生调度时间问题。

同理，对于 E190 型号的飞机来说，如果遇到严重延误的情况，由于该机型每天最多安排了 4 个航班，则该飞机在普通延误的情况可能遭遇的延误时间范围会大于 240 分钟，期望延误时间为 480 分钟，在这种情况下，第 1-4 架飞机会产生调度问题，第 5-6 架飞机不受影响。

在这种情况下，飞机的调度会产生严重的问题，如果不是因为极端天气的原

因，航空公司可以通过分析历史严重延误的次数来调整航空计划，如果历史严重延误次数较多，可以考虑备用 2-4 架飞机，同时一定要提高服务质量，安抚旅客。

#### 4.4.4 航线鲁棒性的分析

在上文中分析了三种情况下我们设计的航线所存在可能的问题。可以看到，A320 型飞机由于执行飞行航线较多，因此遭受延误影响的可能性较大。E190 型飞机执行的航班受延误影响的可能性较小。

通过分析附件二的数据，可得到飞机延误情况如下表所示：

表 4-9 飞机延误情况

飞机型号	总延误期望	延误情况
A320	$45*0.55+225*0.3+720*0.15=200.25$	有 4 台飞机将会受到延误影响
E190	$30*0.55+150*0.3+480*0.15=133.5$	有 4 台飞机将会受到延误影响

对于这种延误的情况，E190 型号的飞机可以通过适当的交换或者变更航线，使得所有飞机时间裕度的标准差减小，从而使得更多的飞机不会因为航班延误而导致飞机调度问题。但是，由于 A320 型飞机延误期望过高，单纯的通过调度飞机的航班航线无法解决航班延误对飞机调度的影响。但是考虑到 A320 型飞机的收益与 E190 型号飞机比起来要高一些，因此，该航空公司可以多租赁几台 A320 型飞机以保证航班的正常运行。

下表是 E190 型飞机通过更改或者交换部分飞机飞行航线后的新的航线计划表。该表中飞行时间裕度的标准差为 246.25，较之前的标准差 311.99 小很多，并且更新后的飞行计划可以保证在平均情况下 3 架飞机不会受到影响。

表 4-10 E190 型飞机新的航线计划表

飞机来源	序号	航线	航线全称	航线运营时间 (min)	飞机总运营时间 (min)	飞机时间裕度 (min)
拥有	第一架	XX1459(XX1460)	天津-黄山-海口	640	640	500
	第二架	XX1405(XX1406)	西安-长沙-汕头	550	1080	60
		XX1439(XX1440)	西安-武汉-福州	530		
	第三架	XX1617(XX1618)	天津-阜阳-厦门	510	1000	140
XX1607(XX1608)		天津-临沂-福州	490			
第四架	XX1614(XX1615)	温州-青岛-天津	540	1110	30	
	XX1611(XX1612)	天津-郑州-桂林	570			

租赁	第五架	XX1571(XX1572)	西安-天津-沈阳	570	570	570
	第六架	XX1691(XX1692) XX1609(XX1610)	天津-三亚 天津-郑州-南宁	500 605	1105	35

综上所述，对于 A320 型飞机来说，简单的改变飞机的航班计划不能够有效的避免或者减少延误带来的调度问题，所以，可以通过增加备用飞机的方法来进行调整。但对于 E190 型飞机来说，可以通过改变航班的计划来一定限度的避免延误带来的调度问题。然而，如果遇到了严重延误的情况，两种型号的飞机都需要通过租赁额外的飞机来减少延误带来的问题。

## 5 模型的优点与缺点

### 5.1 模型的优点

1. 本文通过分析各个因素之间的相互关系，确定了线性的表达式。通过线性回归，确定了各个因素的重要性。
2. 成功将飞机调度问题转换成了 0-1 多背包问题，并通过动态规划的方法得到了问题的最优解。
3. 通过贪心算法，合理的进行了当月中不同飞机之间的调度，尽可能的减少了额外飞机的租赁。
4. 比较了不同程度延误情况下，航班调度安排的鲁棒性。

### 5.2 模型的缺点

1. 问题二中，仅仅只考虑了 2 个类型的飞机和 2 个维修基地，若维修基地和飞机类型变多，模型的适应性不佳。
2. 问题三中，未考虑维修替代飞机在转场中增加的成本。
3. 问题四中，由于题目中飞机延误信息比较简单，没有对飞机延误的具体情况做更进一步的讨论。

## 6 模型的进一步讨论

1. 在本文中我们只考虑到飞机排班的因素，但是在实际中，飞机的排班会影响飞机的客座率和折扣率，对于航空公司的期望票价收入会有一些的影响。因此在下一步的工作中，我们应当考虑在飞机排班的情况下，航空公司的期望票价收入和支出的变动和影响，从而使得我们的模型更加的符合实际情况。

2. 另外, 本文只考虑了 2 个维修基地的情况, 由于目前航线越来越复杂, 经停机场也越来越多, 如何在模型中加入更多的维修基地, 使得飞机能够更快地进行维修并且尽可能地飞行更多的航线也是下一步要考虑的一个问题。

3. 考虑到经济成本, 是否应该拆分或者合并航线, 使得航空公司支出尽可能减少, 以此来提高收益也是需要进一步讨论的。

## 参考文献

- [1] 都业富. 实用航班计划优化方法[J]. 系统工程理论与实践, 1995:23-27.
- [2] 朱星辉. 航空公司航班计划优化设计研究[D]. 南京航空航天大学, 2007.
- [3] 徐进. 航空公司航班计划的优化方法研究[D]. 南京航空航天大学, 2007.
- [4] 李福娟, 王鲁平, 刘仲英. 航班计划优化模型及其应用研究[J]. 计算机工程, 2007, 33(11):279-281.
- [5] 孙建中. 0 / 1 背包问题动态规划算法的探讨[J]. 现代计算机: 专业版, 2005:106-107.
- [6] 贺毅朝, 田海燕, 张新禄, 等. 基于动态规划法求解动态 0-1 背包问题[J]. 计算机科学, 2012, 39:237-241.
- [7] 胡运权. 运筹学基础及应用[M]. 高等教育出版社, 2004.
- [8] 百度百科. 航班计划. [http://baike.baidu.com/link?url=Nf-WDfhmMPxbb59Lja5w-fCUE6t0cv8EiERJDTlhloBYHdId8G30NxLvdAN3VtSEle2l5zIDf8qCAbd\\_JRa](http://baike.baidu.com/link?url=Nf-WDfhmMPxbb59Lja5w-fCUE6t0cv8EiERJDTlhloBYHdId8G30NxLvdAN3VtSEle2l5zIDf8qCAbd_JRa). 2015.

## 附录

### 1. 航班收益情况

航班号	航线全称	期望票价收益	收益
XX1690	厦门-天津	200587.7294	137216.3644
XX1692	三亚-天津	203153.405	132689.765
XX1689	天津-厦门	197201.7259	131030.1859
XX1437	西安-南充-三亚	196628.6424	111795.449
XX1583	天津-桂林	146502.4832	81962.93319
XX1584	桂林-天津	140443.2011	81087.98108
XX1669	天津-重庆	143736.4688	79708.88564
XX1670	重庆-天津	136426.8193	79179.71692
XX1682	三亚-武汉-天津	178182.275	75360.4279
XX1667	西安-贵阳-三亚	161227.611	75211.931
XX1681	天津-武汉-三亚	183226.0954	74749.56536
XX1405	西安-长沙-汕头	136561.8118	74736.8318
XX1668	三亚-贵阳-西安	150577.8737	66759.93867
XX1645	西安-重庆	96675.79651	57698.77411
XX1646	重庆-西安	93228.81538	57578.4332
XX1663	西安-桂林	108005.1335	57073.32556
XX1664	桂林-西安	103242.1881	55393.72697
XX1533	西安-南京	86658.51614	42007.26314
XX1534	南京-西安	85693.64674	37230.32074
XX1658	成都-天津	93149.753	35027.54723
XX1609	天津-郑州-南宁	107650.7846	33093.29821
XX1691	天津-三亚	105761.6942	32419.54419
XX1406	汕头-长沙-西安	97505.72019	31724.91519
XX1649	西安-昆明	81726.76915	30136.04915
XX1657	天津-成都	95766.26321	29921.06287
XX1459	天津-黄山-海口	108835.535	26509.21862
XX1612	桂林-郑州-天津	87156.25551	24801.45051
XX1439	西安-武汉-福州	81910.3481	24624.70143
XX1610	南宁-郑州-天津	94174.03368	23165.12214
XX1650	昆明-西安	66382.848	18913.918
XX1614	温州-青岛-天津	74187.54797	16047.23797
XX1615	天津-青岛-温州	77284.69803	14950.18053
XX1603	天津-宁波	64180.45469	14816.74135
XX1627	天津-杭州	63079.11925	13610.73525
XX1438	三亚-南充-西安	95364.37762	13235.76762
XX1460	海口-黄山-天津	93446.76132	11914.52632
XX1628	杭州-天津	61090.42493	11209.81093
XX1604	宁波-天津	65227.67114	10043.16481
XX1599	西安-南昌-厦门	86613.32333	9482.823328
XX1440	福州-武汉-西安	69704.67144	8312.268107

XX1611	天津-郑州-桂林	75330.56157	8015.326571
XX1661	天津-上海	53422.1325	5693.2585
XX1600	厦门-南昌-西安	86183.24854	4341.128536
XX1662	上海-天津	54467.4375	4174.1585
XX1647	西安-呼和浩特	36074.00299	626.322986
XX1648	呼和浩特-西安	36485.28027	-1510.95973
XX1571	西安-天津-沈阳	55045.28484	-5632.45916
XX1608	福州-临沂-天津	34052.10398	-22920.03685
XX1572	沈阳-天津-西安	36505.9777	-27788.1883
XX1607	天津-临沂-福州	24721.0656	-30110.33825
XX1617	天津-阜阳-厦门	32712.85668	-33768.10685
XX1618	厦门-阜阳-天津	26270.78454	-38841.59311