

2015 湖南省研究生数学建模竞赛参赛承诺书

我们仔细阅读了湖南省研究生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权湖南省研究生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号是（从组委会提供的试题中选择一项填写）：B 题

我们的参赛报名号为（如果组委会设置报名号的话）：201518001015

所属学校（请填写完整的全名）：国防科技大学

参赛队员（打印并签名）：1. 李为峰

2. 张攀峰

3. 范加武

指导教师或指导教师组负责人(打印并签名)：

日期： 年 月 日

评阅编号（由组委会评阅前进行编号）：

2015 湖南省研究生数学建模竞赛

编号专用页

评阅编号（由组委会评阅前进行编号）：

评阅记录（可供评阅时使用）：

[illegible]

湖南省首届研究生数学建模竞赛

题 目

航班计划的合理编排

摘 要：

本文意在解决航班计划的合理编排问题，基于已有的航线资源，建立数学模型，实现航班计划合理编排的自动处理。

将航班计划的合理编排这个复杂的组合优化问题分为四个子问题，对其进行了详细的分析，并深入探讨了解决这些问题的具体方法，进而是航班计划的合理编排问题。

第一，航线收益分析。在航线收益来源和成本的分类讨论基础上，建立航线收益模型，引入航线边际贡献及小时贡献率对航线收益进行准确的刻画。结合计算结果，分别对影响航线成本和收益的因素要进行分析。对于影响成本的因素，在定性分析的基础上，对五种最主要的变动成本进行定量讨论，得出影响航线成本的主要因素包括机型、机场等级、飞行小时数等；对于影响收益的因素，从宏观、微观两个层面综合进行，得出影响航线收益的主要因素包括票价、航班时段、机型、城市特点、GDP 等。并针对性地提出整改措施。

第二，航班计划制定。具体来说限定了当天的航线任务，所以问题简化为航班时刻决策问题和飞机联线问题。根据对题意的不同理解，我们分别假设了有时刻变动成本和无时刻变动成本这两种情况。前者是一个以收益为目标函数的线性规划问题，我们通过设定约束条件确定了合理的调整时刻计划。后者是一个排列问题，我们使用启发式算法来进行最优排列。

第三，维修约束下的航班计划制定。题目限制了在第二问确定的航班计划的基础上加入维修考虑，所以第三问主要是飞机联线问题。由于限定了到达 130 飞行时间必须进行一天的维修，我们可以通过制定计划时间表的方式来进行约束。另外加入了大量基于现实的约束，使候选空间收缩到合理范围内，最后通过贪婪算法完成最优排班计划检索

第四，航班计划的鲁棒性分析及考虑鲁棒性的航班计划制定。我们首先通过把延误成本加入总的航班成本中来考虑航班计划的稳健性，延误成本主要基于延误时间和延误概率。加入延误成本的航班计划设计是一个以收益为目标函数的线性规划问题，我们用 Grover 算法的改进算法来实现最优化。

关键字：航线收益分析、航班计划制定、飞机联线问题、鲁棒性分析

一、问题重述

随着我国国民经济的快速发展，国内民航业进入了一个高速发展时期^[1]。民航业不断出现新的发展趋势，民航运输行政垄断的打破，低成本航空和高速铁路的兴起，都使得民航企业竞争日趋激烈。在这样的情况下，生产计划的重要性就越来越突出。航班计划，实际上就是航空公司向社会承诺提供的航空运输服务产品，它规定了飞行的航线、航段、机型、航班号、班次和班期、（起降）时刻等。从这个意义上说，航班计划是航空公司最重要的生产计划，是组织与协调航空运输生产活动的基本依据。科学地制定航班计划，有效地执行航班计划，既有助于航班的安全运行，又能提高飞机的利用率，还可以有效地降低运营及维护成本，提高公司的经济效益。

在国内某个以客运为主的航空公司中，运行指挥中心、机务部门综合考虑市场需求、生产资源情况、飞机维修的要求、财务盈利要求等限制条件，结合上一月的市场分析结果，编排制定下个月的航班计划。一般情况下，航班计划的制定按照一定顺序完成，同时又环环相扣、相互影响，因此需要反复修改、不断优化，最终生成满意的、可执行的航班计划，下发到飞行总队具体执飞。

航班计划的编排方法分为人工编排模式和自动编排模式。其中，人工编排模式虽然操作简单但是存在很多缺点：第一，由于航班量不断增加，其工作难度越来越大，甚至已不可行；第二，排班的灵活性、合理性欠缺；第三，排班存在主观性，其优劣依赖于工作人员的技能水平；第四，人工编排得到的仅是一个可行解，没有考虑收益最大化。随着计算机工具的引入，各种数据处理技术的发展，应运而生多种不同的自动编排方法，可以避免人工编排的随意性，并可在很大程度上提高工作效率及合理性，实现航空公司的资源利用最大化，从而使收益最大化。本质上来说，航班计划编排是一个复杂的组合优化问题。为解决该问题，根据题目要求，建立合理的数学模型依次回答如下问题：

1、进行航线收益分析，找出影响收益的主要因素，并根据分析结果提出针对亏损航线的整改措施；

2、假定各航线的航班时刻可以根据需要变动，同时假定现有飞行航线和航空公司的营销能力是稳定的，建立模型，编排合理的航班计划，使得航空公司的收益最大化；

3、考虑飞机需要定期维修的需求，在不改变航班计划的情况下，求解至少需要新增飞机的台数；

4、评价问题 2 中求得的航班计划的“鲁棒性”，并重新制定带“鲁棒性”约束的最优航班计划。

二、名词解释

航班计划是指规定正班飞行的航线、机型、班次和班期时刻的计划^[2]。为了使叙述问题更加方便，将航班计划问题中的相关名词^{[1],[3]}作出如下解释：

机型：执行不同的航班要求飞机具有不同的飞行性能，按照性能分为不同飞机型号，简称机型。如本文中讨论的 A320 和 E190 两种机型。

航班：由同一架飞机（尾号相同）一次执行的，具有同一航班号（可以包含多个航段，也可以只有一个航段）的飞行任务，一个航班可有多次起降。如 XX1405、

XX1437 等。

航段：飞机执行的一次飞行任务，一次任务只完成一次起降，也称为航节。

班次：在同一条航线市场上，航空公司一个周期内（一周或一天）安排的航班次数，也称为航班频率。

航线：航空公司开展运营的路线，包括起点、终点、经停等要素。航线资源是航空公司的宝贵财富、稀缺资源。如“西安-长沙-西安”、“西安-南京”等。

班期：一周内某航班的具体执行日期。如班期为.2.4.6.7 则表示该航班在一周中的周二、周四、周六和周日执行。

最小过站时间：航班飞机着陆后要执行包括添加燃料、飞机仪表检查、旅客下机及登机必要操作，这些操作必须在飞机着陆到下一航班起飞之间完成，按照不同的机场和飞机，会有不同的最小过站时间。

航班串：前一航班到达时间在后一航班的出发时间之前，并且该两航班之间的时间差满足最小过站时间的限制条件，则称航班在时间上连续；前一航班的到达机场与后一航班的出发机场相同，则称航班在空间上连续。航班串是将同时满足时间和空间连续的多个航班，按时间顺序组合起来而形成的一串航班。本文讨论的航班串是指，一架飞机在一天中完成的满足时空衔接的航班序列。

维修基地：航空公司主基地，航空公司能够在这些基地机场对飞机进行定检维修。这种基地不仅用于夜间停放飞机，还能提供飞机进行定检维修的各种设备。

三、航线收益分析

3.1 问题分析

航线收益是指航空公司在一条特定航线上投入商业运营，预期可获得的销售收入^[4]。它是衡量航空运输管理水平的重要指标。准确把握影响航线收益的主要因素，是航空公司制定正确的航线决策、编制合理的航班计划、提高航空公司收益的前提，对于提高航空公司的市场竞争力具有非常重要的现实意义。

航线收益分析主要涉及航线收入和航线成本两个方面。根据题目附件的数据，对航线成本进行分类研究，系统了解影响收益的各相关因素，在此基础上运用不同的方法对影响航线收益的因素要进行筛选，找出影响收益的主要因素，并针对性地提出整改措施。

3.2 模型建立

一般而言，航线收益来源包括：客运、货运、超重行李、邮件、免税商品、代理服务、包机、租赁等。由于本文讨论的是国内某个以客运为主的航空公司，客运收入占绝大多数，因此本研究仅考虑客运收入，而且仅指机票销售收入。简单来说，航空公司的盈利方式是，利用航线资源，为顾客提供运输服务，并通过机票收入获得收益，则：

$$\text{收益} = \text{平均票价} \times \text{平均旅客数} = \text{全价票价格} \times \text{平均折扣率} \times \text{机型座位数} \times \text{客座率}$$

即

$$W = \tilde{n} \cdot \tilde{p} = N \cdot q_n \cdot P \cdot q_p$$

成本类型可以分为固定成本和变动成本。固定成本是指不与旅客运输有关的、

必定要发生的费用，即总额在一定时期和一定业务范围内，不受业务量增减变动的影响而固定不变的成本，如工资、航材摊销、飞机租赁费、飞机保险费、设备折旧、飞机训练费、管理费用、销售费用等；而变动成本是直接和航班运行有关的费用，及总额与业务量总额成近似正比例关系，如机组小时费、航油消耗、飞机维修费、旅客餐食、代理费、结算手续费等。根据上述方法，将题目附件中的各项运行成本进行分类：航油费、机组人员工资（小时费）、起降及非航空性业务费、餐食、机供品、保险费-旅客责任险、不正常航班费用、航材维修费、发动机维修费均属于变动成本，机组人员工资中的固定部分属于固定成本。不妨假设机组人员工资即指机组人员小时费。

航线收益扣除航油费、餐食费和航材维修费等变动成本后是航线边际贡献，即

$$\text{航线边际贡献} = \text{收益} - \text{变动成本}$$

航线边际贡献再扣除分摊的固定成本就是航线利润，即

$$\text{航线利润} = \text{航线边际贡献} - \text{固定成本}$$

从上述公式，可以看出如果边际贡献为正，这个航线就会带给航空公司利润的增加或亏损的减少，只要航线边际贡献大于 0，即使航线不能保本，航线也是有存在的意义。因为其边际贡献值还可以用来弥补一些固定成本，如果不飞，就加大了其他航线的固定成本分摊，从而减少了整体利润。

需要注意的是，如果航线 A 的边际贡献大于航线 B 的边际贡献，并不能断然选择航线 A 进行优先飞行，因为航线 A 与航线 B 的飞行时间不同，可能航线 A 需要飞行 5 小时，而航线 B 只需要飞行 2 小时。因此，基于公司林如最大化原则考虑航线选择，引入小时贡献率作为参考。小时贡献率为航线边际贡献除以航线经营时间，即

$$\text{小时贡献率} = \frac{\text{航线边际贡献}}{\text{经营时间}}$$

根据上述模型，利用题目附件给出的数据，计算出不同航线的边际贡献和小时贡献率（如表 3.1 所示），对不同航线的收益进行分析。

表 3.1 不同航线的边际贡献和小时贡献率

航线	边际贡献	小时贡献率	航线	边际贡献	小时贡献率
西安-长沙-汕头	74736.83	18684.21	天津-阜阳-厦门	-33768.11	-9004.83
汕头-长沙-西安	31724.92	7613.98	厦门-阜阳-天津	-38841.59	-10357.76
西安-南充-三亚	111795.45	25312.18	天津-杭州	13610.74	7777.56
三亚-南充-西安	13235.77	3054.41	杭州-天津	11209.81	5848.60
西安-武汉-福州	24624.70	7387.41	西安-重庆	57698.77	49456.09
福州-武汉-西安	8312.27	1847.17	重庆-西安	57578.43	53149.32
天津-黄山-海口	26509.22	5301.84	西安-呼和浩特	626.32	395.57
海口-黄山-天津	11914.53	2553.11	呼和浩特-西安	-1510.96	-863.41
西安-南京	42007.26	21916.83	西安-昆明	30136.05	13908.95
南京-西安	37230.32	18615.16	昆明-西安	18913.92	9456.96

西安-天津-沈阳	-5632.46	-1251.66	天津-成都	29921.06	10880.39
沈阳-天津-西安	-27788.19	-6947.05	成都-天津	35027.55	15011.81
天津-桂林	81962.93	20926.71	天津-上海	5693.26	2970.40
桂林-天津	81087.98	36039.10	上海-天津	4174.16	2087.08
西安-南昌-厦门	9482.82	2188.34	西安-桂林	57073.33	32613.33
厦门-南昌-西安	4341.13	982.90	桂林-西安	55393.73	31653.56
天津-宁波	14816.74	9877.83	三亚-贵阳-西安	66759.94	14565.80
宁波-天津	10043.16	6695.44	西安-贵阳-三亚	75211.93	16409.88
天津-临沂-福州	-30110.34	-8211.91	天津-重庆	79708.89	34160.95
福州-临沂-天津	-22920.04	-6548.58	重庆-天津	79179.72	24362.99
天津-郑州-南宁	33093.30	7091.42	天津-武汉-三亚	74749.57	14467.66
南宁-郑州-天津	23165.12	5244.93	三亚-武汉-天津	75360.43	15591.81
天津-郑州-桂林	8015.33	1885.96	天津-厦门	131030.19	50721.36
桂林-郑州-天津	24801.45	5835.64	厦门-天津	137216.36	56779.19
温州-青岛-天津	16047.24	4011.81	天津-三亚	32419.54	8104.89
天津-青岛-温州	14950.18	3737.55	三亚-天津	132689.77	39806.93

3.3 结果分析

为了对航线收益进行分析，分别对影响成本和收益的因素进行讨论。

（一）影响成本的相关因素

根据航空公司的历史经验^[5]，影响成本的相关因素如表 3.2 所示。

表 3.2 不同成本的影响因素

成本类型	相关因素
机组人员工资	机组标准、机组人员人数、飞行小时
航油费	机型平均小时油耗费、飞行小时
起降及非航空性业务费	机型起降费标准
餐食	航班时段、人均标准、航班人数
机供品	人均标准、航班人数
保险费-旅客责任险	人均标准、航班人数
航材消耗	机型平均小时航材消耗、飞行小时
不正常航班费用	延误时间、航班人数
航材维修费	机型平均小时航材消耗、飞行小时
发动机维修费	机型平均小时航材消耗、飞行小时

由题中数据，不同成本占总成本的比例不同，如图 3.1 所示。

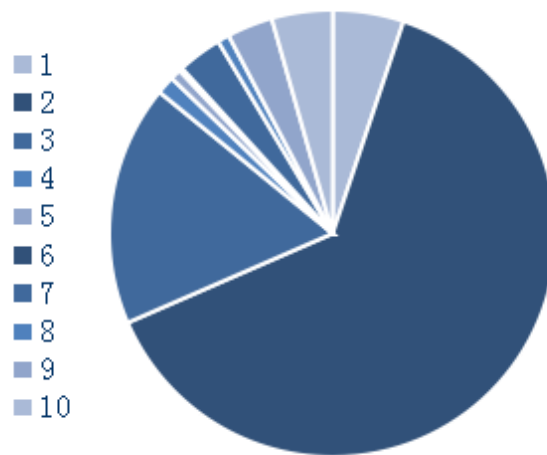


图 3.1 不同成本的费用饼状图

为了讨论主要因素，对航油费、起降及非航空性业务费、航材消耗、航材维修费、发动机维修费五种变动成本进行重点分析。

1、航油费

航油费与机型平均小时油耗费、飞行小时有关，或者说与油价、耗油量有关。如图 3.2 所示。

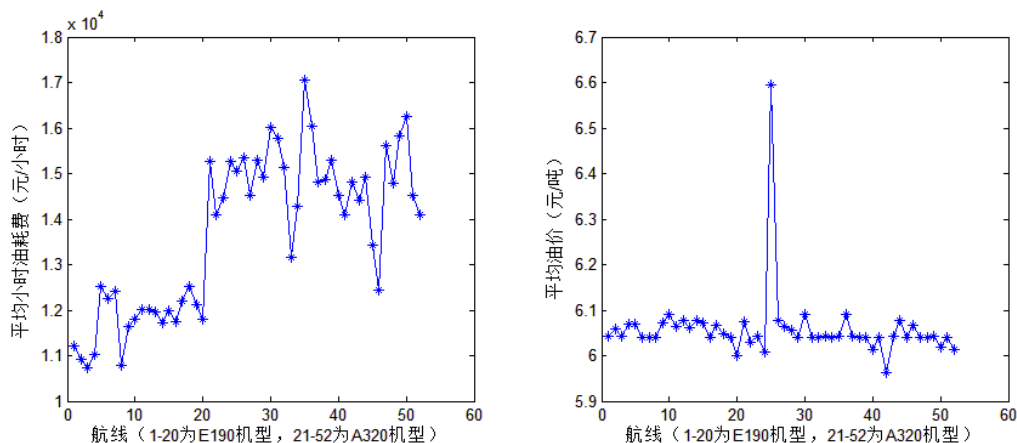


图 3.2 不同航线的航油费分析

可以看到，E190 的平均小时油耗费比 A320 低，在 11770 元/小时左右，而 A320 的平均小时油耗费在 14885 元/小时左右。而两种机型的平均油价均为 6.05 元/吨。

2、起降及非航空性业务费

起降费指机场对使用该机场跑道的航空公司或航空器所征收的费用；非航空性收费是由旅客、货物和航空公司业务衍生出来的其他需求相关，有明确规定标准的仅是一小部分，主要有头等舱休息室租金、值机柜台租金、售票柜台租金等，通常按月收取。

图 3.3 展示了不同航线的起降及非航空性业务费。

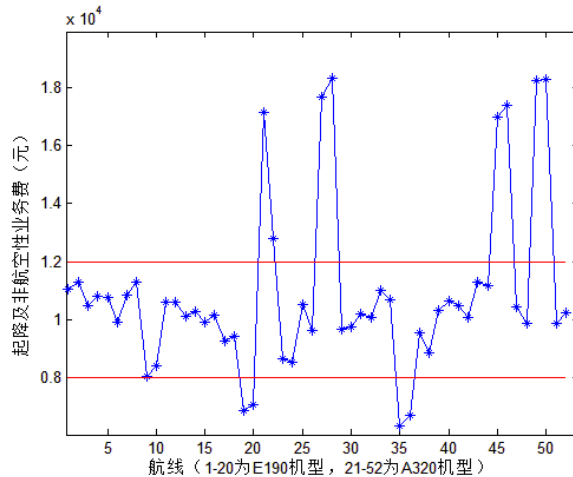


图 3.3 不同航线的起降及非航空性业务费

可以看到大部分航线的起降及非航空性业务费集中在 8000 元到 12000 元之间。对数据进行深入分析，可以得到如下结论：

- 1) 起降及非航空性业务费与起降次数有关，次数越多，则费用越高
超过 12000 元的航班均为联程航班，而航程航班比直达航班的起降次数多。
- 2) 起降及非航空性业务费与飞机型号有关，机型越大，则费用越高
在联程航线中，E190 执飞的航线的起降及非航空性业务费均低于 A320 执飞的联程航线，并且 A320 机型执飞的联程航班，如 XX1437 “西安-南充-三亚”、XX1437 “西安-南充-三亚”、XX1599 “西安-南昌-厦门”、XX1600 “厦门-南昌-西安”、XX1668 “三亚-贵阳-西安”、XX1667 “西安-贵阳-三亚”、XX1681 “天津-武汉-三亚”、XX1682 “三亚-武汉-天津”，其费用均超过 12000 元。
- 3) 起降及非航空性业务费与机场规模有关，规模越大，则起降费用越低，非航空性业务费越高

对直达航线的费用按照机场规模进行总结，如表 3.3 所示。

表 3.3 直达航线的起降及非航空性业务费

	天津（三类）	西安（二类）
上海（一类 1 级）	10272.18	----
成都（一类 2 级）	10486.90	----
昆明（一类 2 级）	----	9191.93
杭州（二类）	10121.45	----
重庆（二类）	10161.00	10830.80
厦门（二类）	10045.95	----
南京（二类）	----	8595.31
桂林（二类）	10078.32	11220.31
三亚（三类）	6946.67	----
宁波（三类）	9711.36	----
呼和浩特（三类）	----	6520.01

参照 2012 年底发布的《关于调整内地航空公司国际及港澳航班民用机场收费标准的通知》（民航发[2007]159 号），按照文件规定，机场收费主要与机场

规模、机型大小和航班性质有关。以一类 1 级机场（首都机场、浦东机场）收费标准为例，起降费按照最大起飞全重收取，对于国内航班

$$\text{起降费(元/架次)} = \begin{cases} 240 & , T < 25\text{吨} \\ 650 & , 26 < T < 50\text{吨} \\ 1100 + 22 \times (T - 50) & , 51 < T < 100\text{吨} \\ 2200 + 25 \times (T - 100) & , 101 < T < 200\text{吨} \\ 5000 + 32 \times (T - 200) & , T > 201\text{吨} \end{cases}$$

即 A320 在一类 1 级机场的起降费为 $1100 + 22 \times (77 - 50) = 1694$ 元，而 E190 的起降费为 $1100 + 22 \times (51.8 - 50) = 1139.6$ 元。详见表 3.4。

表 3.4 不同机型在不同等级机场的起降费

	一类 1 级	一类 2 级	二类	三类
A320	1694	1721	1798	1948
E190	1139.6	1141.4	1193.2	1343.2

3、航材消耗、航材维修费、发动机维修费

航材消耗、航材维修费、发动机维修费均与机型、飞行小时有关，即
航材消耗=平均小时航材消耗×飞行小时
通过计算，可以得到不同机型的平均小时航材消耗（航材维修费、发动机维修费），如表 3.5 所示。

表 3.5 不同机型的平均小时航材消耗（航材维修费、发动机维修费）

	平均小时航材消耗	平均小时航材维修费	平均小时发动机维修费
A320	400.15	933.33	1127.41
E190	991.11	438.64	707.19

（二）影响收益的相关因素

根据收益模型，可知航线收益的直接影响因素为票价、平均折扣率、航班座位数以及客座率。以折扣率为例，做折扣率和收益的趋势，如图 3.4 所示。

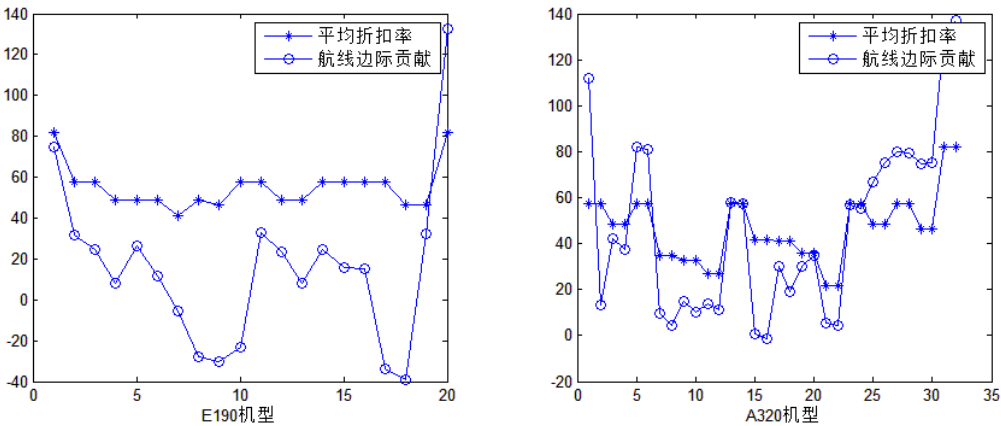


图 3.4 不同机型的折扣率与收益趋势图

直接观察可以发现航线边际贡献与平均折扣率有明显相关关系，利用相关系

数衡量两者相关关系密切程度。

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

通过计算，可以得到 $r_{E190} = 0.7427$, $r_{A320} = 0.8442$ 。也就是说，平均折扣率是影响航线收益的一个重要因素。

另一方面，平均票价水平、客座率又受到了区域经济发展水平、人口规模、人均收入及居民消费能力等宏观经济因素，以及航线上的运力供给能力，如机型、航班时刻、航班频率等微观因素的影响^[6]。因此，下面从宏观、微观两个层面系统分析影响航线收益的主要因素。

1、影响航线收益的微观因素

影响航线收益的微观因素，主要是指以客运为主的航空公司的航线运营供给表现在航空公司制定航班计划的各个方面，包括航班时段、机型、航班频率、班次等。

1) 航班时段

航班时段是一个宝贵的资源，是除了航线外各家航空公司争夺的对象之一，由此可见其对于航线收益的影响之大。特别地，繁忙机场的起降时刻资源稀缺是一个广泛存在的问题。除此之外，航班时刻设计也关系着航班正点率，延误会给航空公司带来额外的收益损失。

取最早航班的时段为[7:00,7:29]，最晚航班的时段为[23:30,23:59]，以 30 分钟为界划分时段，共分为 33 段。可以通过收集同一航线在各个时段的边际贡献数据，以分析时段对收益的影响，并通过灰色关联法验证边际贡献服从统一分布规律。

2) 机型

每种机型都有其载客量限制。机型决定了一架飞机的载运力，机型过大，运力浪费，机型过小，需求溢出。每条航线只有配备适合的机型，在不浪费运力的前提下最大限度的满足需求，以合理的客座率运用，才能最大限度的实现收益。如 XX1647 航班“西安-呼和浩特”、XX1648 航班“呼和浩特-西安”选用的 A320 机型完成飞行任务，而其客座率分别为 57.89%和 58.55%，即乘客人数均少于 106 人，造成了巨大的运力浪费，而导致航班亏损。

2、影响航线收益的宏观因素

从宏观因素的角度，航空客运市场的消费需求主要受到政治、经济、社会的影响。针对航线，应考虑的影响因素有：地区生产总值 GDP、城镇人口、两城市的特点（是否是省会城市和旅游城市）、工业总产值、第三产业产值等。对题目中航线的收益结果进行对比分析，可以直观地得出：

1) 省会城市与省会城市之间或省会城市与旅游城市之间的航线收益比其它航线收益更高

如 XX1669 “天津-重庆”、XX1670 “重庆-天津”和 XX1691 “天津-三亚”、XX1692 “三亚-天津”的收益比 XX1603 “天津-宁波”、XX1604 “宁波-天津”的航线边际贡献更高。

2) 与 GDP 高的城市之间的航线收益比与 GDP 低的城市航线收益更高

如 XX1645 “西安-重庆”、XX1646 “重庆-西安”的收益比 XX1647 “西安-

呼和浩特”、XX1648“呼和浩特-西安”的航线边际贡献更高。

从动因分析，是两个城市（ i, j ）之间（航线）产生了某种经济、政治和社会的联系，对这两个城市的人口产生了到对方去的“吸引力”。如果城市越发达、人口越多，显然需求越大；当然也有阻力，如距离越远，人们就越不想去。因此可以考虑一个基本模型^[7]：

$$I_{ij} = \frac{f(R_{ij}, A_{ij})}{g(D_{ij})}$$

其中， I_{ij} 指城市 i, j 之间的吸引力， R_{ij} 指城市 i, j 之间的阻力参数， A_{ij} 指城市 i, j 之间的吸引力参数， D_{ij} 指城市 i, j 之间的距离。

从不同的角度考虑，模型可以有不同变形，如

$$A_{ij} = k \frac{H_i H_j}{D_{ij}^b}$$

其中， H_i, H_j 指城市 i, j 人口， k, b 为常数。

3.4 亏损航线的整改措施

根据 6.1.2 对航线收益的影响因素的分析，对目前亏损航线提出相应的整改措施，如表 3.6 所示。

表 3.6 亏损航线的整改措施

航班号	航线	整改措施
XX1571	西安-天津-沈阳	1、适当提高全价票票价 2、有针对性地将特价票放在直销网站上进行销售
XX1572	沈阳-天津-西安	
XX1607	天津-临沂-福州	1、适当提高全价票票价 2、加大航线的宣传力度，力争扩大临沂市场
XX1608	福州-临沂-天津	
XX1617	天津-阜阳-厦门	1、适当提高全价票票价 2、跟旅行社合作，开发“阜阳-厦门”旅游路线
XX1618	厦门-阜阳-天津	
XX1647	西安-呼和浩特	1、改换机型，由 E190 机型执飞 2、跟旅行社合作，“呼和浩特-西安”旅游路线
XX1648	呼和浩特-西安	

四、航班计划制定

4.1 问题分析

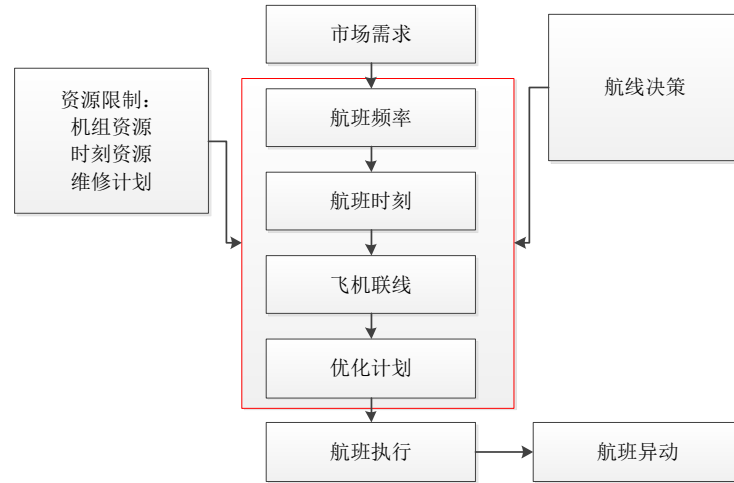


图 4.1 航班计划的流程

航空公司自上而下制定航班计划的流程如图 4.1 所示，其中主要内容为航班频率决策，航班时刻决策，机型分派和飞机联线四部分。经过这些步骤即可制定一个可执行的航班计划，交给飞行部门执行。根据实际航班计划制定经验，航班计划以周为循环周期，即按周循环执行制定好的飞行计划。

具体到第二问，由于假定每个航线每日只安排一个班次的飞机，即各航班的航班频率为 7（以 1 周为周期）。另外各航班的机型已经在数据中给定，即不存在机型分派问题。所以第二问我们只考虑航班计划制定中的航班时刻决策和飞机联线问题。

对于航班时刻决策问题，由于假定各航线的航班时刻可以根据需要变动，同时假定现有飞行航线和航空公司的营销能力是稳定的，也就是说，航班时刻的变动不会影响航线航班的盈利。

因为总收益 = 各航线收益（常量）- 固定成本（机组人员工资、航油费、起降及非航空性业务费、机供品、保险费-旅客责任险、航材消耗、航材维修费、发动机维修费）- 变化成本（不正常航班费用、餐费）- 租赁飞机成本 - （航班时刻变动成本）。

这里我们考虑到航班时刻（slot）是重要的机场资源。在资源不紧张的机场，例如支线机场，航空公司可以自由决定航班时刻，而在枢纽或骨干机场，slot 非常紧张，航班时刻都是分配好的，不可能任意改动。而且在成熟的航线市场，旅客也不希望经常变动航班时刻，航空公司在排班时一定会保留这些时刻。因此涉及繁忙机场的航线的航班频率是已知常数。求解方程时必须设定这些常数。

由于题目并未明确提出是否有时刻变动的代价，我们讨论认为关于航班时刻变动存在两种可能性：

（1）不存在航班时刻变动成本。由于下一步的飞机排班的目标是在保证飞行安全的前提下为飞机合理的指派飞行时刻表中的航班，以尽量减少租赁额外的飞机。则该问题主要考虑如何合理安排航班时刻，使得所需飞机数目最少，减少租赁飞机成本，使得总收益最大。

(2) 存在航班时刻变动成本。由于总收益公式中存在两个成本变量，租赁飞机的成本和航班时刻变动的成本。该问题转为一个最优化的问题，即通过线性规划确定最佳的变动航班时刻方案，是变动 slot 的成本和额外租赁飞机的成本之和最小，进而总收益最大。

4.2 模型建立

1) 变动航班时刻无成本方案

1 符号说明

D_f : 航班 f 的计划起飞时间;

R_f : 航班 f 的计划降落时间;

S_f : 航班 f 降落后的最小机场服务时间;

G_f : 航班 f 的地面等待时间;

a_f : 航班 f 的空中等待时间;

c_{gf} : 每个时间单元地面等待成本;

c_{af} : 每个时间单元空中等待成本;

l_{ij} : 航班 f 飞越管制区 j 所花费的时间单元;

T_{jf} : 航班 f 在管制区 j 内飞行的可行时间区间 $[T_{jf}, T_{jf}]$;

其中 T_{jf} : 航班 f 进入管制区 j 的时间下限; T_{jf} : 航班 f 离开管制区 j 的时间上限。

定义决策变量:

$$w_{ft}^j = \begin{cases} 1, & \text{如果航班 } f \text{ 在时间 } t \text{ 或之前进入航线 } j \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (4.1)$$

2 模型假设

目标函数:

$$\min \sum_{f \in h} [\sum_{t \in T_f^k, k=P(f, N)} t(w_{ft}^k - w_{f, t-1}^k) - r_f]$$

约束条件:

$$\sum_{t \in T, k=P(f, N_f)} (w_{ft}^k - w_{f, t-1}^k) = 1, \forall k \in O, t \in j \quad (4.1)$$

$$w_{f, t+l_{fj}}^j - w_{ft}^j \leq 0, \begin{cases} \forall f \in h, t \in T_f^j, j = P(f, i) \\ j' = P(f, i+1), i < N_f \end{cases} \quad (4.2)$$

$$w_{ft}^k - w_{f', t-s_f'}^k \leq 0 \begin{cases} \forall (f', f) \in h', t \in T_f^k \\ k = P(f, 1) = P(f', N_f) \end{cases} \quad (4.3)$$

$$w_{ft}^j - w_{f, t-1}^j \geq 0, \forall f \in h, j \in P_f, t \in T_f^j \quad (2.4)$$

约束方程式 (4.1) 是航班制订约束。它是为了保证我们所考虑的每一次航班都能找到合理的降落时间,也就是保证模型一定会找到解。

约束方程式 (4.2-4.4) 是联系约束。其中式 (4.2) 是航班飞越航路点的约束,体现了相邻航路点的关系,我们在前面已经定义 l_{ij} 是航班 f 从航路点 j 飞到下一个航路点 $j+1$ 所花费的时间单元; 因此约束方程表示如果飞机在时刻 $t + l_{ft}$ 到达航

路点 j' ,那么在时刻 t 时飞机肯定已经到达航路点 j (j' 是飞机 f 航路上 j 的下一个航路点)。也就是说航班只有先到达航路点 j 并再飞行 l_{jt} 才能到达下一航路点 j' 。

式(4.3)是航空器连续飞行的约束,体现了了两个机场之间的关系,如果一架飞机执行完一次航班任务后,会在一定时间后执行另一次航班任务。设前一航班任务为 f' ,执行下一航班任务为 f 。该约束方程表示如果航班 f 在时刻 t 从机场 k 起飞,那么航班 f' 至少应该在 $t-s_{f'}$ 时到达机场 k 。最小机场服务时间 $s_{f'}$ 与在机场的清洁、加油、装卸货物、上下飞机以及为下一趟飞行的准备工作有关。也就是说只有在航班 f' 到达机场并至少经过 $s_{f'}$ 时间后,航班 f 才能起飞。

式(4.4)是时间约束,体现了时间的联系,该约束方程表示如果在时间 t 航班到达了管制区 j ,那么在以后时间 $t' \geq t, w_{j,t,t'} \equiv 1$ 。

2) 变动航班时刻有成本方案

1 模型假设

目标函数:

$$\text{Max } \pi = \sum_{rs} \sum_i (1 - E(\phi_{rs})) p_{rs} s^a E(l_{rs}) x_{rst}^a - \sum_{rs} \sum_i C_{rs}^a T_{rs} x_{rst}^a$$

其中各参数含义是:

$E(\phi_{rs})$: $r-s$ 航线票价的期望折扣率; p_{rs} : $r-s$ 航线的公布票价; s^a : 机型 a 的飞机座位数; $E(l_{rs})$ 航线 $r-s$ 的期望客座率; C_{rs}^a 机型 a 在航线 $r-s$ 上的平均小时运行成本(元/小时); T_{rs} : $r-s$ 航线的飞行小时(小时/班); x_{rst}^a : 决策变量 $r-s$ 航线第 i 个航班使用 a 机型: 第 i 个航班不执行: $x_i = 1$ 第 i 个航班被执行。

考虑以下约束条件

(1) 航线频率(班次数)限制条件。 $r-s$ 间总的班次数(n_{rs})是已知的,它应该小于等于各航线 $r-s$ 间班次数之和:

$$n_{rs} \leq \sum_i x_{rsi} \quad \forall rs$$

(2) 旅客运量限制条件。在第 i 条航线上所提供的座位数,应该大于等于旅客需求数。如果考虑到有溢出和 go-show(没有事先订票,临时到机场购票)的旅客,客座率不能是 100%,用 l 表示客座率,可由航空公司根据情况自己决定。例如在需求不旺的航线市场上 l 可取 1;在经常有溢出的航线市场上 $l < 1$ 。

$$\sum_i s^a t_{rs} x_{rsi}^a \geq d_{rs} \quad \forall rs$$

(3) 飞行时间限制。考虑飞机可利用小时数,也是飞机资源利用的限制。飞机数(U)与单架飞机最大飞行时间(u)是确定的,在排班时必须限制。同时飞机也必须达到一定的飞行小时数,即单架飞机日利用率(w)必须大于规定数:

$$\sum_i T_{rs} x_{rsi}^a \leq u * U \text{ and } \sum_i T_{rs} x_{rsi}^a \geq u * U \quad \forall rs$$

(4) 航段最大承运数限制。在多段航线上,每一段航班的最大承运数不能超过机型最大座位数,即

$$\sum_{rs \in M_i^g} d_{rs} \leq s^a I_{maxj} x_{rsi} \quad \forall i, g$$

其中 g 表示航线中的一段。 $rs \in M_i^g$ 表示第 i 条航线服务的 $r-s$ 城市,且包括途径的所有起始点航段集合。即 $\sum d_{rs}$ 是所有途径和乘坐本航段的旅客总数,它必须小于或等于提供的飞机座位数。

(5) 起飞架次限制。虽然在决策航班频率时已经可以确定班次,即起飞架次。但在特别限制条件下(如协议或繁忙机场),起飞架次限制不等于按常规决策的班次,必须额外加以限制。

$$\sum_i x_{rsi}^a \leq N_{maxj} \quad \forall rs$$

N_{maxj} 表示航线的最大起飞架次数。

(6) 机队守恒限制。一般情况下航空公司排班采用一去一回配对方式,这样去程航班和回程航班必须满足:

$$f_i - f'_i = 0 \quad \forall i$$

本研究未考虑飞机维修情况。因为飞机初级维修(A检)不需要停场,不影响航班。对于高级维修(B、C、D检),因为间隔时间长,在周计划中不会体现,故一般不予考虑。

4.3 模型求解

由于大型整数规划方程的求解是非常困难的,尤其是对全国所有航班的整数求解,有时不一定是计算时间的问题,而是能不能得到最优解的问题。航班时刻优化是属于先期流量管理问题,它是在航班时刻颁布之前执行的,不同于多机场地面等待策略(航班时刻已经确定,要考虑旅客登机的问题),我们可以对部分航班做提前起飞的调整。因此如果一个机场的一个时间段的航班数量超过了该机场的容量值,那么把超过容量的部分航班既可以转移到下一个时间段起降,也可以转移到前面有剩余容量的时间段。这样,现有的机场容量和空域容量就可以更加有效的利用。可前推后推的航班时刻优化启发式算法步骤如下:

1、取种群规模 N , 换位概率为 P_c , 随机在集合 S 中产生初始种群, 解码后记为 $P(0)$ 。另代数 $t = 0$;

2、(基因换位): 以概率 P_c 在 $P(t)$ 中选择参加基因换位的个体, 用基因换位算子产生后代 C 。

3、(局部搜索): 对每个基因换位产生的后代, 用局部搜索法对其产生新的后代, 这些后代的集合记为 O_1 ;

4、(选择): 在 $P(t) \cup O_1$ 中选择最好的 N 个个体作为下一代种群 $P(t+1)$, $t = t + 1$;

5、若终止条件成立, 则停; 否则, 转步骤 2。

我们用 MATLAB 实现了上述算法, 并针对此问题得出结果如下:

表 4.3.1 航班时刻优化结果

		起飞	降落	出发地	目的地
E-190_1	XX1459	6:00	11:00	天津	海口

	XX1460	11:45	16:25	海口	天津
	XX1609	17:10	21:50	天津	南宁
	XX1610	22:35	3:00	南宁	天津
E-190_2	XX1571	6:00	10:30	西安	沈阳
	XX1572	11:15	15:15	沈阳	西安
	XX1611	16:00	20:15	天津	贵州
	XX1612	21:00	1:15	贵州	天津
E-190_3	XX1405	6:00	10:00	西安	汕头
	XX1406	10.:45	14:55	汕头	西安
	XX1615	15:40	19:40	天津	温州
	XX1614	20:25	0:25	温州	天津
E-190_4	XX1691	6:00	10	天津	三亚
	XX1692	10:45	14:05	三亚	天津
	XX1617	14.5	18:35	天津	厦门
	XX1618	19:20	23:05	厦门	天津
E-190_5	XX1607	6:00	9:40	天津	福州
	XX1608	10:25	13:55	福州	天津
	XX1439	14:40	18:00	西安	福州
	XX1440	18:45	23:15	福州	西安
A-320_1	XX1681	6:00	11:10	天津	三亚
	XX1682	11:55	16:45	三亚	天津
	XX1667	1:30	22:05	西安	三亚
	XX1668	22:50	3:25	三亚	西安
A-320_2	XX1437	6:00	10:25	西安	三亚
	XX1438	11:10	15:30	三亚	西安
	XX1599	16:15	20:35	西安	厦门
	XX1600	21:20	1:45	厦门	西安
A-320_3	XX1583	6:00	9:55	天津	桂林
	XX1584	10:40	12:55	桂林	天津
	XX1657	13:40	16:25	天津	成都
	XX1658	17:10	19:30	成都	天津
	XX1689	20:15	22:50	天津	厦门
	XX1690	23:35	2:00	厦门	天津

A-320_4	XX1669	6:00	8:20	天津	重庆
	XX1670	9:05	12:20	重庆	天津
	XX1649	13:05	15:15	西安	昆明
	XX1650	16:00	18:00	昆明	西安
	XX1661	18:45	20:40	天津	上海
	XX1662	21:25	23:25	上海	天津
A-320_5	XX1533	6:00	7:55	西安	南京
	XX1534	8:40	10:40	南京	西安
	XX1627	11:25	13:10	天津	杭州
	XX1628	13:55	15:50	杭州	天津
	XX1663	16:35	18:50	西安	桂林
	XX1664	19:05	20:50	桂林	西安
	XX1647	21:35	23:10	西安	呼和浩特
	XX1648	23:55	1:40	呼和浩特	西安
A-320_6	XX1603	6:00	7:30	天津	宁波
	XX1604	8:15	9:45	宁波	天津
	XX1645	10:30	11:40	西安	重庆
	XX1646	12:25	13:30	重庆	西安

由结果可知,我们需要额外增加 1 架 E190,4 架 A320。则计算每日收益可得:

$$\begin{aligned}
 \text{Profit} &= \sum_i (N_{q_n} P q_p) - \sum_i C_i - (N_{A320} C_{A320} - N_{E190} C_{E190}) / 30 \\
 &= 1804710.4 - (32 \times 10^4 \times 4 \times 6.3685 + 25 \times 10^4 \times 6.3685) / 30 \\
 &= 1.4799 \times 10^6
 \end{aligned}$$

其中一月按 30 日算, 汇率为当天汇率 (2015 年 9 月 16 日星期三)。

另外从航班状态我们可以看到, 优化前的航班相当集中, 使得我们必须使用更多飞机才能完成当日的排班计划。经过优化后, 航班均匀分布, 使得我们能够以较小的飞机数量完成任务。

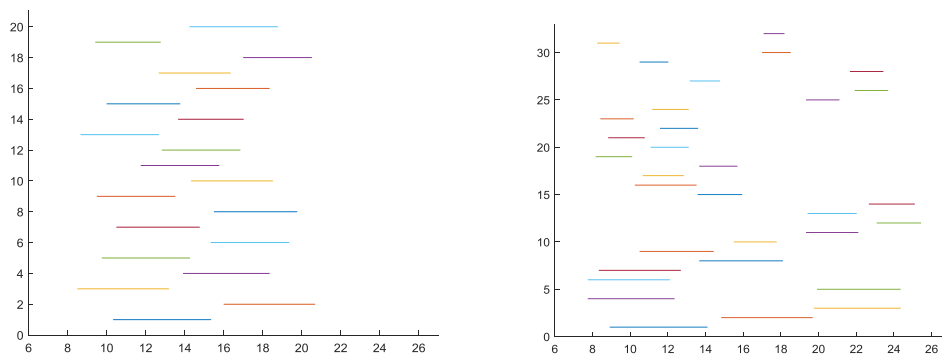


图 4.3.1 优化前的所有航班工作状态（E190 与 A320）

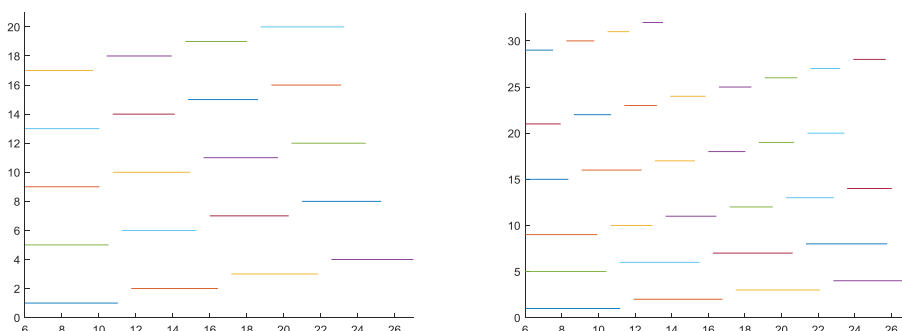


图 4.3.2 优化后的所有航班工作状态（E190 与 A320）

五、考虑维修的航班计划制定

5.1 问题分析

考虑维修的飞机排班的目标是在保证飞行安全的前提下为飞机合理的指派飞行时刻表中的航班，使飞机停场维修带来的经济损失减到最小、并且尽量减少租赁额外的飞机。

具体来讲，对于飞机维修计划的制定，就是让一个机群中所有飞机的停场维修(包括规定的字母检和其他需停场进行的维修工作)时间尽量避开五一、国庆、春节等黄金周时间，以保证为这段时间提供充足的运力。在其他时间，尽量保证一个机群中最多只有一架飞机处于停场维修状态，也就是使同一机群中各飞机的停场维修时间呈阶梯状分布，互不重叠。对于航班的编排，在有飞机停场维修时，若不能将所有航班均予以安排，则根据运营部的要求，提前安排利润较大的航班，取消经济损失较小的航班。

5.2 模型建立

根据图灵机模型，若执行航班的飞机数为 m ，排班天数为 k ，则解空间为 $((m-1)!)k$ ，对于排班周期为一周的飞机排班问题，其解空间为 $((m-1)!)7$ 。下面分步列出了飞机排班问题的数学模型。

1. 因为飞机是执行航班的主体，所以飞机排班的第一步是将飞行时刻表转化映射为与飞机数目匹配的航班计划：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{27} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n7} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

上式涉及两个重要参数：①航班时刻表所列的航班数 n ；②执行航班的飞机数 m 。

设排班的操作为 Δ ，则有： $([A]_{m \times 7}, [B]_m, \Delta) \Rightarrow [C]_{m \times 7}$ ，即：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{27} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m7} \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{17} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{m7} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

显然， $n \geq m$ ，一般飞行时刻表所列航班数总要比飞机数多，因此， Δ 操作就是：

$$\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{mi} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

即把周 i 的 n 个有效航班整理为 m 组，使之与飞机数 m 相匹配。

其中，周 i 的有效航班数 $n \leq$ 时刻表所列的航班数 n 。原因是有些航班不是每天都有，将 n 个有效航班根据衔接规则组合为 m 组航班，即 $[C]_{mi}$ 。

2. (1)这里需要指出的是，周 i 的 m 组航班构成机制是一个排列， $[C]_{mi}$ 是 $(m-1)!$ 种排列方式之一。 $[C]_{m \times 7}$ 的组合空间：

$$\begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} \infty \begin{bmatrix} c_{12} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{bmatrix} \infty \cdots \infty \begin{bmatrix} c_{17} \\ \vdots \\ c_{m7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{16} & c_{17} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{11} & c_{m2} & \cdots & c_{m6} & c_{m7} \\ c_{21} & c_{12} & \cdots & c_{16} & c_{17} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{21} & c_{m2} & \cdots & c_{m6} & c_{m7} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{11} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{m6} & c_{17} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{m6} & c_{m7} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} = [\Gamma] \quad (5.4)$$

其中： $r_k = \{c_{k1}, c_{k2}, \cdots, c_{k7}\}$ ，表示第 k 种组合方式， $[\Gamma] = ((m-1)!)^7$ 。

如果航空公司有 10 架飞机运营， $m=10$ ，这一步运算将产生出 $(9!)^7$ 种组合方式，若 $m=100$ ，则有 $(99!)^7$ 种组合方式，就需要在这样大的组合空间中去寻找或确定排班计划，这就是飞机排班的复杂性。

(2) 排班决策

首先要确定决策目标。飞机排班中最重要的决策依据是：飞机当前飞行小时和维修计划。按照有关规定，B737-300 型飞机 A 检间隔 250 飞行小时。如果某架飞机因种种原因停场定检日期已经确定，那么飞机排班应保证该架飞机停场之前的飞行时间尽量接近 250 小时。若超过，则违法；若不够，则会造成经济损失。例如，该架飞机在本周还剩余 s 飞行小时，那么飞机排班的任务之一就是在 $((m-1)!)^7$ 组合空间中搜寻空中时间为 s 飞行小时的航班组合。处理这个问题的遍历算法是十分简单的。但是实践中遍历 $((m-1)!)^7$ 组合空间的不可实现性使问题变得异常复杂。对于有 10 架飞机的航空公司， $((m-1)!)^7 = (9!)^7$ ，假设计算机

每秒钟搜索 104 种组合，则需要 2.6×10^{27} 年。于是简单逻辑的不可实现性问题就只能在可实现的算法中去寻找答案，其代价就是逻辑的复杂性。

如果存在一种可行的算法 ∇ ，那么上述问题可描述为：

$$\langle [C]_{m \times 7}, \nabla \rangle \Rightarrow [C]_{1 \times 7}^0 \quad (5.5)$$

下面定义几种排班方式。

定义 1 均衡排班

一个 $m \times n$ 的矩阵，各元素之和 $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m p_{ij} = c$ ，寻找一个方案，使得：

$$\sum_{i=1}^m p_{ij} \rightarrow \frac{c}{n}, \text{ 并使 } \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m p_{ij} - \frac{c}{n}) \rightarrow 0$$

定义 2 指定值排班

一个 $m \times n$ 的矩阵，各元素之和 $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m p_{ij} = c$ ，寻找一个方案，使得：

$$\sum_{i=1}^m p_{ij} \rightarrow c_j, \sum_{j=1}^n c_j = c, \text{ 使 } \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m p_{ij} - c_j) \rightarrow 0$$

定义 3 混合排班 一个 $m \times n$ 的矩阵，各元素之和 $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m p_{ij} = c$ ，将其分为

两部分： $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m p_{ij} = \sum_{j=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^m p_{ij} + \sum_{j=\alpha+1}^n \sum_{i=1}^m p_{ij}$ ，寻找一个方案，使得：

$$\sum_{i=1}^m p_{ij} \rightarrow c_j (j = 1, 2, \dots, \alpha), c_{\alpha} = \sum_{j=1}^{\alpha} c_j, \sum_{i=1}^m p_{ij} \rightarrow \frac{c - c_{\alpha}}{n - \alpha} (j = \alpha + 1, \alpha +$$

$2, \dots, n)$ 并使：

$$\sum_{j=1}^{\alpha} (\sum_{i=1}^m p_{ij} - c_j) + \sum_{j=\alpha+1}^n (\sum_{i=1}^m p_{ij} - \frac{c - c_{\alpha}}{n - \alpha}) \rightarrow 0$$

实际应用中的飞机排班大都是混合排班。

5.3 模型解决

本节中计算机排班是指根据排班周期内所有待排航班的飞行时间和各飞机的维修计划，计算出各飞机在本排班周期的计划飞行时间，然后根据各种约束条件进行排班。计算机排班过程可分为以下几步：

1. 设定具体约束条件

在进行计算机自动排班之前，排班人员需要人工设定一些参数以使排班能够正确地进行，这些参数包括：

适应于维修计划的设置。如起飞或达到航站设置、起飞或到达时间设置等。

预排信息设置。设定要求由指定飞机执行的航班的执行飞机。

2. 计算各飞机的计划飞行时间

飞行时间是飞机定检时间确定的主要依据，合理计划飞机的飞行时间不仅能够控制飞机的定检时间，并且能够为之后的排班工作提出明确的优化目标：即排班后每架飞机执行的航班的飞行时间总和要与飞机的计划飞行时间尽可能得接近。飞机计划飞行时间的计算方法如下：

A. 确定待排航班集合。

根据飞行时刻表、各种调整表和排班周期的起止时间，确定本排班周期中每天的待排航班集合。飞行时刻表是市场部下发的中期航班计划表，由于售票或其他各种情况，常常要对飞行时刻表予以调整，具体调整方法以各种调整表形式下发。飞行时刻表、各种调整表以及排班周期的起止时间三者共同决定了排班周期

中每天需要安排的航班的集合。

B. 计划飞行时间表初始化。

将 M 架飞机分别以 $1, 2, \dots, M$ 编号, 以 M 为行值、排班周期的班期数 N 为列值, 构造一个 $M \times (N+1)$ 的空表 (最后一列为本排班周期该架飞机的总飞行时间)。并参照维修计划, 若有飞机在本排班周期停场维修, 则将该日该架飞机对应的单元格内的飞行时间置为 0。例如为 5 架飞机安排一周的航班, 3 号飞机周六周日停场维修, 则如表 5.1 所示。

表 5.1 初始化的飞行时间表

	一	二	三	四	五	六	日
A320 1	24	24	24	24	24	24	24
A320 2	24	24	24	24	24	24	24
E190 1	24	24	24	24	24	24	24
E190 2	24	24	24	24	24	24	24
E190 3	24	24	24	24	24	24	24

C. 计划飞行时间计算

分别计算排班周期中每天每架飞机的计划飞行时间。将每天待排航班按照执行机型分类, 每类的飞行时间平均分配至每种类型的有效的飞机上, 并将各飞机本周期飞行时间之和列入最后一列。

D. 人工调整计划飞行时间。

由于各架飞机的自开始飞行时间不同, 为使同一机群中各飞机的停厂维修时间呈阶梯状分布, 且互不重叠, 可能会要求某架飞机多飞或者少飞, 以便使飞机在计划的停场定检之前尽量飞够需要的小时数, 减少损失, 因此需要排班人员来人工指定有特殊要求的飞机的计划飞行时间。除指定的之外, 同机型其余飞机平均分配剩余飞行时间。

表 5.2 人工调整的飞行时间表

	一	二	三	四	五	六	日
A320 1	24	24	24	24	24	10	14
A320 2	24	24	24	24	10	14	24
E190 1	24	24	24	24	24	10	14
E190 2	24	24	24	24	10	14	24
E190 3	24	24	24	10	14	24	24

3. 每日待排航班分组。

一架飞机每天可以执行若干个航班, 若将航班直接分配给飞机, 不仅在优化的同时考虑过站时间衔接、航站衔接等种种约束条件, 增加处理问题的难度, 而且随着航班数量的增加, 排班问题的复杂性以及解决它所需要的时间也会急剧增加。为了实际应用上的可行, 先将待排航班按照一定的规则分组, 在分组过程中处理“航班—航班”匹配问题。

首先将周一 (周二至周日航班同样处理) 待排航班按照执行机型分类, 然后选择其中的一类, 例如 A320 类航班 (其余各类同样处理):

a. 每个航班独立为一组, 确定航班组数 t , 并为每个航班组确定属性, 以便于随后分组的进行。航班组属性包括: 始发时间、到达时间、始发航站、到达航站、飞行时间、是否高原、是否包含预排飞机信息。对于只有一个航班的航班组, 航班组的属性为该航班的属性。确定 A320 机型的飞机总数 M 、有效飞机 (即本日可以执行航班的飞机) 数 m 以及停场飞机数 s 。显然有 $M = m + s$ 。

b. 若 $t > m$, 转步骤 c, 若 $t = m$, 转步骤 d, 若 $t < m$, 转步骤 e。

c. 对于航班组集合中的任意两个航班组, 如果他们能够满足以下条件, 则

可以将这两个航班组合并为一个新航班组，加入航班组集合，并删除原来两个航班组。

- 过站时间衔接。即一航班组（不妨设为 A）的到达时间与另一航班组（不妨设为 B）始发时间满足过站时间约束。
- 过站地衔接。A 航班组的到达航站与 B 航班组的始发航站相同。
- 执行飞机衔接。若 A、B 航班组都预先指定了执行飞机，则执行飞机必须相同。不允许两个航班组都具有预排飞机信息但预排飞机不同。

合并之后，A 航班组的始发时间为新航班组始发时间，始发航站为新航班组的始发航站；B 航班组的到达时间为新航班组到达时间，到达航站为新航班组的到达航站。A、B 两航班组的飞行时间和为新航班组的飞行时间。若 A、B 航班组中至少一个为高原航班组，则新航班组也为高原航班组，否则为非高原航班组。若 A、B 航班组至少一个预排了执行飞机，则新航班组也预排了此执行飞机，否则没有预排信息。确定新的航班组集合中的航班组数 t_1 ，若 $t=t_1$ ，转步骤 f，否则令 $t=t_1$ ，转步骤 b。

d. 若 $s=0$ ，即该日没有停场飞机，则航班分组结束。否则添加 s 个空航班组，即始发时间、到达时间、始发航站、到达航站、高原信息、预排飞机信息均为空的航班组，以便于后继处理工作。

e. 选择航班组集合中飞行时间最长的航班组，将其按照步骤 c 的逆过程拆分为两个航班组。确定新的航班组集合中的航班组数 t_1 ，令 $t=t_1$ ，转步骤 b。

f. 至此航班不能全部安排，提醒排班人员，去掉部分航班后，转入步骤 a 重新分组。经过以上步骤分组之后的航班组与飞机能够互相匹配，即航班组数目等于飞机数 M ，并且有效航班组数等于有效飞机 m ，空航班组数等于停场飞机数 s 。

4. 确定约束空间，处理“飞机—航班组”匹配问题

分组后的航班组数目与同机型飞机数是相等的。即若某一机型有 m 架飞机，则每天的待排航班为 m 组。根据前文对飞机排班问题复杂性的讨论可知，在无约束条件下，为 m 架飞机安排一周的航班有 $((m-1)!)^7$ 种方式。随着飞机数量的增加，无约束排班空间也在急剧增大，在其中找出一个最佳甚至较佳的方式都是非常困难的。

然而实际当中的排班并非无约束的，由于各种限定条件，各航班组不能随意指派给任意一架飞机。满足各种约束条件的排班方式构成的解空间为约束空间。相对于无约束排班空间，约束空间中的排班方式不仅实际可行，而且规模要小很多，有利于在其中找到一个最优或者较优的排班方式。

表 5.3 约束后的飞行时间表

	一	二	三	四	五	六	日
A320 1	G11	G12	G13	G14	G15	G16	G17
A320 2	G21	G22	G23	G24	G25	G26	G27
E190 1	G31	G32	G33	G34	G35	G36	G37
E190 2	G41	G42	G43	G44	G45	G46	G47
E190 3	G51	G52	G53	G54	G55	G56	G57

约束空间的确定过程实际上就是去掉无约束空间中的不适合约束条件的排班方式的过程。对于选择表来说，就是去掉相应单元格表示的航班组集合中的不适合元素。下面列出了选择表对于各种约束层的添加方法。

(1) 起始航站约束层。由于飞机是连续执行航班的，因此它在排班周期第一

天早上的所在航站决定了可以执行的航班组的始发航站。

- (2) 停场限制约束层。对于在排班周期内有停场维修计划的飞机，在停场期间不执行航班，也就是执行空航班。
- (3) 起飞或到达航站约束。由于各个基地维修能力的不同，有些基地可能进行一些飞机大修项目，如西安和天津机场。

各种约束层添加完成后，可以得到约束选择表，约束选择表大大简化了原来的无约束选择表。如表 5.4 就是添加各中约束条件后得出的一个约束选择表。

表 5.4 最终得到的飞行时间表

	一	二	三	四	五	六	日
A320 1	G' 11	G' 12	G' 13	G' 14	G' 15	G' 16	G' 17
A320 2	G' 21	G' 22	G' 23	G' 24	G' 25	G' 26	G' 27
E190 1	G' 31	G' 32	G' 33	G' 34	G' 35	G' 36	G' 37
E190 2	G' 41	G' 42	G' 43	G' 44	G' 45	G' 46	G' 47
E190 3	G' 51	G' 52	G' 53	G' 54	G' 55	G' 56	G' 57

约束空间选择表中包含了满足以上约束条件的各种排班方式，但这些排班方式也不一定是实际可行的，因为没有考虑过夜航站约束，即第 i ($1 \leq j \leq 6$) 天的到达航站要与第 $i+1$ 天的始发航站相同。只有在由约束空间选择表动态生成排班序列时加入过夜航班约束条件，才能得到最终的排班约束空间。

通过实验已经证实，对于小规模排班问题，随着各种约束条件的添加，可以使有上百万种排班方式的空间大幅塌缩，有时只有数百种甚至只有几十种排班方式，在这么小空间中寻找最优解就比较可行，也为之后的排班优化做好了铺垫。

5. 飞机排班

虽然约束空间已比无约束空间大大缩小，但是随着机群规模的扩大，寻找最优解仍然比较困难。根据第四节的模型二，我们设计了飞机排班的新算法，达到了比较理想的效果。

六、鲁棒性分析及考虑鲁棒性的航班计划制定

6.1 问题分析

6.1.1 航空公司生产计划的鲁棒性

航空公司生产计划的鲁棒性是指生产计划自身有一定的“抗干扰能力”，即有一定容量可以自身进行调节从而减少航班延误和取消的发生，以及航班发生延误或取消等航班不正常情况时比较容易恢复正常。其评价准则主要有减少航空公司的实际运营成本、减少飞机和机组的延误以及误衔接、在出现航班不正常时比较容易恢复和当出现独立航班不正常时减少独立航班不正常对后续航班的影响。

航班的延误不但会降低旅客对航空公司的满意度，而且会增加航空公司的运营成本。根据文献，在中国，旅客计划延误单位时间成本为 60 元 /h，因此将航班延误带来的成本增加考虑到飞机排班过程中很有必要。这样可将飞机的利用率和航班延误进行综合考虑，优化飞机飞行路线。这也是本文提出了基于航班延误概率的飞机排班模型的目的

所以我们将航班计划的鲁棒性问题转变为延误成本问题，通过计算航班计划的延误成本来评价计划的鲁棒性。

6.1.2 带有“鲁棒性”约束的最优航班计划

基于考虑延误成本的鲁棒性定义，我们提出了基于延误概率的鲁棒性飞机排班问题的模型。通过把总的成本作为目标函数来实现飞机排班，再加上各项限制条件，实现延误成本最小的排班计划。由于飞机排班问题是典型的 NP 问题，在对这类问题的求解过程中，通常使用遗传算法、蚁群算法等一些智能算法来解决问题，在运行时间和最优解方面上都得到了客观的结果。

6.2 模型建立

6.2.1 基于延误概率的飞机排班模型

基于历史数据分析及经验，通过航班的衔接时间长短来推断在此期间内航班发生延误的概率，为此假设：航班衔接时间与航班发生延误的概率关系如图 6.2.1 所示。

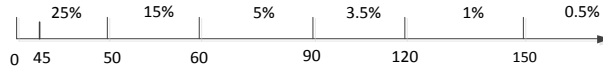


图 6.2.1 航班衔接时间与发生延误概率的关系

t 是航班的衔接时间，其中 t_1 是航班的最小衔接时间， m_k 是航班衔接时间在 t_k 到 t_{k+1} 时间段内航班发生延误的概率，当衔接时间大于 t_{k+1} 时，延误概率均为 m_{k+1} 。那么航班 i 在航线 x_j 中的延误概率可表示为

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1 - \prod_{r=1}^n (1 - q_r), & n \geq 1 \end{cases}$$

其中： n 是航线 x_j 中航班之前航班的衔接次数； $q_r = m_k$ ，当航线 j 的第 i 个过站衔接时间在 $(t_k, t_{k+1}]$ 。

由上可知，选择发生延误概率小的航班配对组合可减少航班的误衔接，减小延误成本但是，航班衔接时间增加会减少飞机的利用率，增加航空公司成本，为减少由航班延误带来的成本增加，同时考虑机型执飞航班的成本，建立如下鲁棒飞机排班模型，具体如下：

集合： F 为航班集合； R 为可行飞机调度方案；

下标变量： i 为航班下标变量； j 为航线下标变量；

参数： c_j 为航线 j 的运营成本；

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{航班 } i \text{ 在航线 } j \text{ 中} \\ 0, & \text{航班 } i \text{ 不在航线 } j \text{ 中} \end{cases}$$

N 为机队飞机总数量； T_i 为航班 i 的延误时间； P_{ij} 为航班 i 在航线 j 中的延误概率； P 为单位时间的延误成本； D_i 为航班的平均市场需求。

决策变量

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{如果航线 } j \text{ 被选中} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

整数规划模型如下

$$\min \sum_{j \in R} \left(c_j x_j + \sum_{i=1}^n a_{i,j} p_{i,j} D_i T_i P \right)$$

约束条件

$$\sum_{j \in R} a_{i,j} x_j = 1, \forall i \in F$$

$$\sum_{j \in R} x_j \leq N$$

$$x_j \in \{0,1\}, \forall j \in R$$

在上述整数规划模型中，目标函数（5）是将所选中的调配方案的总运营成本 and 延误带来的成本之和最小化。约束条件（6）是满足每一个航班仅能被一个航线调配方案覆盖；约束条件（7）是将选定的航线调配方案所需的飞机数量限制在可用飞机的数量之内。

6.2.2 求解鲁棒性飞机排班模型的算法

飞机排班问题是典型的 NP 问题，在对这类问题的求解过程中，遗传算法、蚁群算法等一些智能算法已经成功的应用到了问题的解决中，并且在运行时间和最优解方面上都得到了客观的结果。本文运用的是的 Grover 算法的改进算法，取得了较好的效果。

6.3 问题解答

6.3.1 评价问题 2 中求得的航班计划的“鲁棒性”

		起飞	降落	出发地	目的地
E-190_1	XX1459	6:00	11:00	天津	海口
	XX1460	11:45	16:25	海口	天津
	XX1609	17:10	21:50	天津	南宁
	XX1610	22:35	3:00	南宁	天津
E-190_2	XX1571	6:00	10:30	西安	沈阳
	XX1572	11:15	15:15	沈阳	西安
	XX1611	16:00	20:15	天津	贵州
	XX1612	21:00	1:15	贵州	天津
E-190_3	XX1405	6:00	10:00	西安	汕头
	XX1406	10:45	14:55	汕头	西安
	XX1615	15:40	19:40	天津	温州
	XX1614	20:25	0:25	温州	天津
E-190_4	XX1691	6:00	10	天津	三亚
	XX1692	10:45	14:05	三亚	天津
	XX1617	14:5	18:35	天津	厦门
	XX1618	19:20	23:05	厦门	天津
E-190_5	XX1607	6:00	9:40	天津	福州
	XX1608	10:25	13:55	福州	天津
	XX1439	14:40	18:00	西安	福州
	XX1440	18:45	23:15	福州	西安

A-320_1	XX1681	6:00	11:10	天津	三亚
	XX1682	11:55	16:45	三亚	天津
	XX1667	1:30	22:05	西安	三亚
	XX1668	22:50	3:25	三亚	西安
A-320_2	XX1437	6:00	10:25	西安	三亚
	XX1438	11:10	15:30	三亚	西安
	XX1599	16:15	20:35	西安	厦门
	XX1600	21:20	1:45	厦门	西安
A-320_3	XX1583	6:00	9:55	天津	桂林
	XX1584	10:40	12:55	桂林	天津
	XX1657	13:40	16:25	天津	成都
	XX1658	17:10	19:30	成都	天津
	XX1689	20:15	22:50	天津	厦门
	XX1690	23:35	2:00	厦门	天津
A-320_4	XX1669	6:00	8:20	天津	重庆
	XX1670	9:05	12:20	重庆	天津
	XX1649	13:05	15:15	西安	昆明
	XX1650	16:00	18:00	昆明	西安
	XX1661	18:45	20:40	天津	上海
	XX1662	21:25	23:25	上海	天津
A-320_5	XX1533	6:00	7:55	西安	南京
	XX1534	8:40	10:40	南京	西安
	XX1627	11:25	13:10	天津	杭州
	XX1628	13:55	15:50	杭州	天津
	XX1663	16:35	18:50	西安	桂林
	XX1664	19:05	20:50	桂林	西安
	XX1647	21:35	23:10	西安	呼和浩特
	XX1648	23:55	1:40	呼和浩特	西安
A-320_6	XX1603	6:00	7:30	天津	宁波
	XX1604	8:15	9:45	宁波	天津
	XX1645	10:30	11:40	西安	重庆
	XX1646	12:25	13:30	重庆	西安

如前所述，在中国旅客计划延误单位时间成本=60 元/h，本次建模中已经给出了延误时间的分布概率，假设延误服从正态分布，则可由给定的概率分布计算出平均延误时间为 12 min，即在该实例中 $T_f=0.2h$ 。

要使航线调配有效，必须要将飞机的地面过站时间考虑进去，各航空公司规定的地面过站时间不同，一般在 20 min 到 1 h 之间。在本文中，假设地面过站时间是 45 min，并假设该航空公司的航班衔接时间与航班发生延误的概率具有如图 2 的关系。则根据第一步得出的飞机排班方案，计算出各方案中航班的延误概率和延误成本。

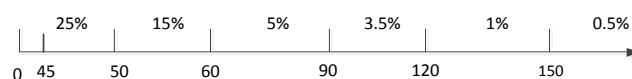


图 6.3.1 某航空公司航班衔接时间与航班发生延误的概率关系

例如第一架 E190 的航线中：航班 XX1459 的延误概率 $P_{XX1459,1}=0$ ，延误成本 = 0。

航班 XX1460 的延误概率 $P_{XX1460,1}=0.25$ ，延误成本 = $0.25 \times 85 \times 60 \times 0.2 = 255$ （元）航班 XX1609 的延误概率 $P_{XX1609,1} = 1 - (1 - 0.25) \times (1 - 0.25) = 0.4375$ ，延误成本 = $0.4375 \times 93 \times 60 \times 0.2 = 488.25$ （元）。

进一步得出总的延迟成本为

$$C_{\text{delay}} = \sum_j C_j = 1.3882 \times 10^4 \text{（元）}$$

6.3.2 制定一个带有“鲁棒性”约束的最优航班计划

将基于延误概率的飞机排班模型应用到 2.3 实例中，使用 Grover 算法的改进算法得出满足飞机排班要求并使运营成本最小的飞机排班方案如表 6.3.1 所示。

表 6.3.1 基于延误概率的飞机排班的优化解

		起飞	降落	出发地	目的地
E-190_1	XX1692	10:45	14:05	三亚	天津
	XX1691	6:00	10	天津	三亚
	XX1618	19:20	23:05	厦门	天津
	XX1617	14.5	18:35	天津	厦门
E-190_2	XX1615	15:40	19:40	天津	温州
	XX1614	20:25	0:25	温州	天津
	XX1612	21:00	1:15	贵州	天津
	XX1611	16:00	20:15	天津	贵州
E-190_3	XX1610	22:35	3:00	南宁	天津
	XX1609	17:10	21:50	天津	南宁
	XX1608	10:25	13:55	福州	天津
	XX1607	6:00	9:40	天津	福州
E-190_4	XX1572	11:15	15:15	沈阳	西安
	XX1571	6:00	10:30	西安	沈阳
	XX1460	11:45	16:25	海口	天津
	XX1459	6:00	11:00	天津	海口
E-190_5	XX1440	18:45	23:15	福州	西安
	XX1439	14:40	18:00	西安	福州
	XX1406	10.:45	14:55	汕头	西安
	XX1405	6:00	10:00	西安	汕头
A-320_1	XX1690	23:35	2:00	厦门	天津

	XX1689	20:15	22:50	天津	厦门
	XX1682	11:55	16:45	三亚	天津
	XX1681	6:00	11:10	天津	三亚
A-320_2	XX1670	9:05	12:20	重庆	天津
	XX1669	6:00	8:20	天津	重庆
	XX1668	22:50	3:25	三亚	西安
	XX1667	1:30	22:05	西安	三亚
A-320_3	XX1664	19:05	20:50	桂林	西安
	XX1663	16:35	18:50	西安	桂林
	XX1662	21:25	23:25	上海	天津
	XX1661	18:45	20:40	天津	上海
	XX1658	17:10	19:30	成都	天津
	XX1657	13:40	16:25	天津	成都
A-320_4	XX1650	16:00	18:00	昆明	西安
	XX1649	13:05	15:15	西安	昆明
	XX1648	23:55	1:40	呼和浩特	西安
	XX1647	21:35	23:10	西安	呼和浩特
	XX1646	12:25	13:30	重庆	西安
	XX1645	10:30	11:40	西安	重庆
A-320_5	XX1628	13:55	15:50	杭州	天津
	XX1627	11:25	13:10	天津	杭州
	XX1604	8:15	9:45	宁波	天津
	XX1603	6:00	7:30	天津	宁波
	XX1600	21:20	1:45	厦门	西安
	XX1599	16:15	20:35	西安	厦门
	XX1584	10:40	12:55	桂林	天津
	XX1583	6:00	9:55	天津	桂林
A-320_6	XX1534	8:40	10:40	南京	西安
	XX1533	6:00	7:55	西安	南京
	XX1438	11:10	15:30	三亚	西安
	XX1437	6:00	10:25	西安	三亚

同理得出延误成本为 7654.3 元。

下面对经典模型得出的飞机排班方案和基于延误的鲁棒性飞机排班模型得出的排班方案分析得出：

1) 通过考虑航班延误所带来的成本增加来看，优化后的飞机排班方案相比

飞机利用率是减少了一些，可是航班的延误概率却减少了很多。优化前的延误成本是 1.3882×10^4 元，是优化后的延误成本 7654.3 元的近两倍多，这表明，在实际运营中考虑延误成本是很有必要的。

2) 通过比较优化前后的方案可得出：在飞机利用率近似的情况下，延误成本却减少了 6228 元由此可得，在飞机利用率等同的情况下，考虑延误成本的鲁棒模型优化解，可以帮助决策者在飞机排班的过程中做出更好的决策。

6.4 优缺点总结

如上鲁棒模型的成本和航班延误发生的概率仅仅是针对航班不正常运营的情况下的计算结果，如果航班任何时候都属于正常运营，那么鲁棒模型会使飞队运营成本提高 但是根据统计分析表明除了航班延误的时间越来越长之外，航班每天受到的干扰至少会发生一次。因此，在航空公司的实际运营当中应用本文的鲁棒模型来减少运营成本很有必要。

参考文献

- [1] 魏星，飞机排班一体化优化模型与算法研究，南京航空航天大学，2012：1-8
- [2] 百度百科，航班计划，<http://baike.baidu.com/view/1456170.htm>，2015 年 9 月 14 日
- [3] 郑芸，航空公司小规模机群飞机排班问题的数学模型和算法分析，中国民用航空学院，2006:7-8
- [4] 张桥艳，不同航班时段的收益贡献率分析，交通运输工程与信息学报，8（3）：105-109, 2010
- [5] 鲁悦，航空公司航班计划质量评价方法与实证研究，南京航空航天大学，2010：8-11
- [6] 张巧艳，航线收益影响因素与预测方法研究，中国民用航空飞行学院，2011:7-24
- [7] 李福娟，基于航线决策的航班计划优化研究，同济大学，2007:43-47